Anfangsgründe
der
Arithmetick
Geometrie
und der
Geometrischen
Berechnungen.

Aus dem Lateinischen
Seines Vaters
übersetzt
und nach dessen Anweisung verbessert
durch
Joh. Wilh. v. Segner
K. P. L.

---

mit Kupfern.

Halle im Magdeburgischen,
zu finden in der Rengerischen Buchhandlung.
1764.

Vorbericht des Uebersetzers.

Die Hofnung gegenwärtiges Buch in der Deutschen Sprache noch gemeinnützi- tziger zu machen, als es in der Lateinischen allein seyn konte, hat mich vornehmlich bewogen, die Uebersetzung desselben zu unternehmen. Wenn mir diese Hofnung nicht fehlschlägt, habe ich meinen Zweck völlig erreicht; und sie ist nicht gantz ohne Grund, so lange es eine Warheit bleibt, daß nicht alle diejenigen, welche die Anfangsgründe der Mathematick erlernen wollen, der Lateinischen Sprache so mächtig sind, als man es seyn muß, wenn nicht die Aufmercksamkeit welche die Sachen erfordern, durch das Nachdencken über die Bedeutung der Wörter unterbrochen werden soll.

Von meiner Arbeit selbst habe ich wenig zu sagen. Ich glaube, daß ich den Sinn der Urschrift an keiner Stelle verfehlt habe; und niemals wäre auch

dieses

dieses an einem Uebersetzer weniger zu entschuldigen gewesen, da ich nicht allein von Jugend auf durch den gütigen Unterricht des besten Vaters mit seinen Schriften vertraut geworden bin, sondern auch während dieser Arbeit, so oft mir ein Zweifel übrig blieb, zu der Quelle zurück gehen konte. Ich bin bemüht gewesen die Deutlichkeit zu erreichen, so weit man diese mit der Kürtze verbinden kan; und überhaupt die Achtung nie zu vergessen, welche ein jeder Schriftsteller vor das Publicum zu bezeigen schuldig ist, wenn er nicht in den Verdacht gerathen will, daß er bloß vor sich selbst und vor seine Küche schreibt.

Vorbericht

Die verdeutschten Kunstwörter welche ich bey andern gefunden, habe ich mir zu Nutze gemacht, wo mir dieselben geschickt gewählt zu seyn schienen; sonst aber lieber die Lateinischen Benennungen beybehalten, als sie auf eine Art übersetzen wollen, welche einem Anfänger nur unvollkommene wo nicht gantz irrige Begriffe geben konte.

Die Verbesserungen und Zusätze sind von dem Verfasser gutgeheissen, und grösstentheils an die Hand gegeben worden. Man wird die letzten vornehmlich in der Lehre von den Parallel-Linien, in der ebenen und sphärischen Trigonometrie, und in der abgekürtzten Logarithmen- und Sinus-

Tafel

Tafel finden. Bey dieser habe ich die Arbeit nicht vor überflüssig gehalten, da man den Gebrauch derselben nicht bloß auf die Uebung der Anfänger einschräncken muß, weil sie bey vielen practischen Arbeiten eine zureichende Schärfe der Rechnung giebt.

Die Unrichtigkeiten der Rechtschreibung, welche bey der großen Verschiedenheit derselben in unsern Deutschen Schriften schwer zu vermeiden sind, wird man, wie ich hoffe, in einem Buche verzeihen, wo alles was eigentlich zu dem Schmuck des Stils gehört, nicht als die Hauptsache angesehen werden kan. Einige wenige Druckfehler muß die Eilfertigkeit und die menschliche Schwachheit entschuldigen.

digen. Sie sind am Ende angemerckt worden, und man wird wohlthun, wenn man dieselben bey dem ersten Aufschlagen des Buchs verbessert, damit sie bey dem Gebrauch nicht aufhalten mögen.

Ich wünsche meinen Bemühungen den Beyfall des einsichtsvollen Lesers; welcher mich zugleich belohnen und aufmuntern wird. Halle, den 24. September. 1763.

Vorrede des Verfassers zu der Ausgabe von 1756.

Bey einer neuen Auflage der Anfangs-Gründe der Mathematick, welche ich vor verschiednen Jahren geschrieben habe, glaubte ich, daß ich keine Mühe schonen dürfte, dieselben so viel möglich vollkommen, und zu dem Zweck wozu sie vornehmlich bestimmt sind, geschickt zu machen. Ich habe daher das Buch gäntzlich von neuem ausgearbeitet, indem es mir leichter schien, auf diese Art ein wohleingerichtetes und zusammenhängendes Werck hervorzubringen, als wenn ich einige Dinge auslassen, andre an deren Stelle setzen, oder dem alten etwas neues hätte anfügen wollen. Denn ich werde, was auch andre dencken mögen, täglich in der

Meinung bestärckt, daß man überhaupt auf die dem Anfänger zuerst vorzutragenden Lehren den größten Fleis zu wenden habe, weil dieselben zu allem übrigen den Grund legen sollen, und sich dem Gedächtniß so fest einzudrücken pflegen, daß wenn sich eine Unrichtigkeit darinn findet, es weit schwerer ist, diese fehlerhaften Sätze zu verbessern, als es war, sich dieselben bekannt zu machen. Und es ist ohne Zweifel eine der Haupt-Ursachen, warum so wenige unter uns es in der Mathematick zu einiger Höhe bringen, darinnen zu suchen, daß sie mit großer Mühe solche Dinge lernen, welche sie künftig mit viel grösserer Mühe aus ihrem Gedächtniß vertilgen müssen, wenn sie jemals Mathematick-verständige werden wollen. Denn so lange sie mit diesen Begriffen angefüllt sind, können sie weder aus den Schriften gelehrter Männer, noch aus dem mündlichen Unterricht eines geschickten Lehrers einigen Nutzen ziehen, indem sie gerade das Gegentheil von demjenigen lesen oder hören, was vorgetragen wird.

Wozu dienet aber die Mathematick; eine tiefsinnige Wissenschaft, welche man durch

durch eine mittelmäßige Bemühung nie erlernen wird? Es wird niemand diese Frage aufwerfen wenn er überdacht hat, wie viele von den Begriffen, welche uns von unvernünftigen Thieren unterscheiden demjenigen fehlen, welcher nicht entweder von Natur, oder durch Fleiß und Unterricht, von der Mathematick einige Kenntniß erlangt hat. Was in der Philosophie brauchbar, gründlich, erhaben ist, haben wir gröstentheils der Mathematick zu dancken. Durch sie sind die Künste, welche uns die Bequemlichkeiten des Lebens verschaffen erfunden, oder zur Vollkommenheit gebracht worden. Sie zeigt uns unter allen Wissenschaften am deutlichsten den Weg zur Warheit und Gewisheit, ja sie hat öfters den menschlichen Verstand zu einer Höhe erhoben, welche zu erreichen, er sich kaum versprechen konte.

Da ich also den Lehrlingen der Mathematick zu dieser Wissenschaft eine Anleitung geben wolte, mußte ich die Warheiten sorgfältig wählen, und zugleich Bedencken tragen, unter dem Vorwand der Kürtze und Leichtigkeit etwas auszulassen, was zu wissen nöthig ist, wenn man nicht bey den

den ersten Anfangsgründen stehen bleiben will. Es blieb mir daher kein Mittel übrig den Verstand der vorgetragenen Lehren zu erleichtern, als die Deutlichkeit der Schreibart, die geschickte Ordnung der Sätze, und die Kürtze und Bündigkeit der Beweise, welche aus jener entstehet.

Die Feldmeßkunst, welche ich schon ehedem von der Geometrie abgesondert hatte, damit ich den ausgebreiteten Nutzen dieser Wissenschaft nicht auf einen einzigen Theil einzuschräncken scheinen möchte, habe ich hier gantz weggelassen; und wie ich glaube, der Feldmeßkunst mehr zum Vortheil als zum Schaden. Denn es kan niemand dasjenige, was gemeiniglich die practische Geometrie genennt wird, vollkommen begreifen, wenn er gleich die Anfangsgründe der Geometrie gründlich erlernet hat, so lange er in der Mechanick, Optick und Astronomie ein Fremdling ist; weil die Feldmesser aus allen diesen Theilen der Mathematick ihre Instrumente, oder andre Hülfsmittel ihrer Arbeit hernehmen ꝛc.

Halle, den 22. April 1756.

Inhalt.

Inhalt

Anfangsgründe der Arithmetick

Anfangsgründe der Geometrie.

VIII. Ab-

Anfangsgründe der geometrischen Berechnungen.

Anfangsgründe der Arithmetick

Erster Abschnitt
Von den Zahlen vornehmlich den Gantzen.

Vorerinnerungen.

Die Arithmetick beschäftiget sich mit zusammengesetzten Grössen, deren Theile entweder einander gleich sind, oder vor gleich gehalten werden, so daß zuletzt alles auf gleiche Theile hinaus kommt. Gleichwie aber durch die Wiederholung eines angenommenen Theils allzeit eine Grösse entsteht, welche aus einer Menge dieser Theile zusammen gesetzt ist: so kan auch eine jegliche Grösse auf vielerley Arten in gleiche Theile getheilt werden, welche zusammen genommen diese Grösse ausmachen. Ein jeder dieser Theile hat beständig einige Grösse, und man kan denselben ebenfalls, entweder in gleiche oder ungleiche Theile, weiter theilen. Es wird aber durch eine dergestalt fortgesetzte Theilung die Grösse der Theile desto stärcker vermindert, je öfter die Theilung wiederholet wird, und es werden endlich diese Theile so klein, daß einer oder der andre derselben in Ansehung des Gantzen nicht in Betrachtung kommen kan. Auf diese Art wird, wenn wir uns einen Berg in Staub verwandelt vorstellen, die Grösse des Berges durch den Zusatz eines Stäubchens eben so wenig mercklich vermehrt, als durch den Abgang desselben vermindert werden. Und dieses kommt nach und nach der Warheit desto näher, je mehr, durch die wiederholte Theilung, die Grösse der Theile abnimmt.

Setzen wir ferner eine Grösse A, und eine andre B, welche kleiner ist als jene, so können wir diese B so oft nehmen, daß, wenn gleich

durch

durch die Wiederholung derselben die Grösse A nicht genau hervorgebracht wird, dennoch derjenige Theil, um welchen die aus B zusammengesetzte Grösse, von der Grösse A überstiegen wird, oder dieselbe übersteigt, kleiner werde als die wiederholte Grösse B. Wenn wir also diese Grösse B beständig vermindern, so wird auch dieser Abgang oder dieser Ueberschuß nach und nach so sehr verkleinert werden können, daß er gar nicht in Betrachtung gezogen zu werden verdienet, worauf man annehmen kan, daß die Grösse A aus der wiederholten Grösse B genau zusammengesetzt worden sey. Wenn man nehmlich, durch einen wiederholten Abzug oder auf eine andre Art, die Grösse der Theile beständig vermindert, so werden sie zuletzt kleiner als alles, was man sich vorstellen oder annehmen kan. Endlich entziehen sie sich unseren Gedancken, ja sie können durch die fortgesetzte Verminderung gar zu Nichts werden. Man betrachtet dergleichen Theile der Grössen, welche man nach Belieben bis auf Nichts vermindern kan, zum öftern, und nennet sie unendlich kleine Theile, weil man ihrer Kleinigkeit keine Grentzen setzt. Sie sind von noch so kleinen Theilen, die aber doch ihre bestimmte Grösse haben, wohl zu unterscheiden.

Erklärung.

§. 1. Wenn die Grösse A, oder eine andre derselben gleiche Grösse, durch öftere Wiederholung der Grösse B, ohne Ueberschuß oder Abgang herausgebracht wird, so sagt man, die Grösse B misset die Grösse A genau, oder B ist ein genaumessender Theil von A (Pars aliquota).

Erklärung.

§. 2. Eine Zahl aber ist ein abgesonderter Begrif von der Art, wie eine Grösse A aus einer andern Grösse B, oder derselben genaumessenden Theilen entstehet; und es wird in diesem Fall B Eins oder die Einheit genennt.

Anmerckung.

Fig. 1. §. 3. Wenn wir nehmlich irgend eine Grösse AB durch eine Zahl ausdrücken wollen, so wiederholen wir die Einheit CD, die wir, wenn sie nicht gegeben ist, nach Belieben angenommen haben, so lange, bis die Grösse AE heraus kommt, welche der gegebenen AB entweder gleich, oder nur um so viel kleiner ist, daß sie, wenn man ihr noch eine Einheit zusetzt, grösser wird als AB. Ist das letzte, oder ist die Einheit CD selbst grösser als AB, so theilen wir diese Einheit in Theile, welche unter sich gleich, aber kleiner sind als der Ueberschuß EB, und bemühen uns durch die Wiederholung eines dieser Theilchen CF den Ueberschuß EB heraus zubringen; denn wenn dieses geschehen kan, so wird selbst

AB durch die Wiederholung dieses Theilchens CF genau gemessen werden. Geht es aber nicht an, so wird dennoch das Theilchen GB, um welches die Grösse AB die durch Wiederholung des Theils CF hervorgebrachte Grösse AG übersteigt, kleiner seyn als CF. Es kan also, wenn auch CF weiter in gleiche Theile getheilet, und diese Theilung, wenn es nöthig ist, auch bey einem jeden dieser neuen Theilchen fortgesetzt wird, der letzte Ueberschuß, wenn er nicht gantz verschwindet, so klein gemacht werden, daß er keine Betrachtung verdienet. Geben wir nun bey dieser Arbeit Achtung, auf was vor Art CD getheilet, und wie aus dieser Einheit oder derselben genaumessenden Theilen, AB hervorgebracht worden ist; so entsteht in uns ein Begrif derjenigen Zahl, welche die Beziehung der Grösse AB gegen die Einheit CD anzeiget, oder die Grösse AB durch die Einheit CD ausdrückt.

Erklärung.

§. 4. Wenn die Einheit CD die Grösse AB, welche man durch eine Zahl ausdrücken soll, erschöpfet, folglich CD ein genaumessender Theil von AB ist, so wird AB durch eine gantze Zahl ausgedrückt.

Erklärung.

§. 5. Wenn aber einer der gleichen Theile CF, in welche die Einheit getheilet worden ist, die Grösse AB genau misset; so heißt diese Zahl eine gebrochene, oder ein Bruch.

Anmerckung.

§. 6. Wenn die Einheit selbst, indem sie wiederholet wird, die Grösse AB erschöpfet, so wird dieses auch ein jeglicher von den gleichen Theilen der Einheit thun; folglich kan eine jede Grösse, welche durch eine gantze Zahl ausgedrückt ist, auch auf vielerley Arten durch Brüche ausgedrückt werden. Es ist aber eine Grösse, welche durch einen Bruch ausgedrückt wird, kleiner als die Einheit, oder nicht kleiner. In dem ersten Fall heißt die gebrochene Zahl ein ächter Bruch, (Fractio vera) in dem andern Fall ein unächter Bruch. (Fractio spuria.).

Erklärung.

§. 7. Der Begrif eines Bruchs ist aus zweyen Zahlen zusammengesetzt. Die eine drückt aus, in wie viele gleiche Theile die Einheit getheilt worden ist, die andre bezeichnet, aus wie vielen Theilen von dieser Grösse der Bruch bestehet. Jene Zahl heißt der Nenner (Denominator) des Bruchs, diese hingegen der Zehler (Numerator).

Anmerckung.

§. 8. Diese Glieder eines Bruchs, nehmlich der Zehler und der Nenner desselben, sind ordentlicher Weise gantze Zahlen, ob sie gleich ebenfalls Brüche seyn können. Der Zehler aber eines ächten Bruchs ist kleiner als sein Nenner, der Zehler eines unächten Bruchs hingegen, ist nicht kleiner,

sondern

sondern entweder seinem Nenner gleich, oder grös-ser als derselbe.

Erklärung.

§. 9. Wenn die Grösse AB weder durch die Einheit CD noch durch einen der gleichen Theile, in welche diese Einheit getheilet worden ist, genau gemessen wird, so klein auch diese Theile genommen seyn mögen, so sagt man, daß AB der Einheit CD Incommensurabel sey. Und wenn wir uns eine Zahl vorstellen, welche die Beziehung einer solchen Grösse AB gegen die Einheit CD ausdrückt, so heißt dieselbe eine Irrational-Zahl, folglich werden die übrigen Rational-Zahlen genennt werden müssen.

Anmerckung.

§. 10. Es ist leicht einzusehen, daß es Grössen Fig. 1. giebt, welche mit einer nach Belieben angenommenen Einheit wie CD, incommensurabel sind. Wenn nehmlich AG durch einen der gleichen Theile dieser Einheit, CF, genau gemessen wird, so kan doch, wenn wir zu AG das Stückchen GB, welches kleiner ist als CF, hinzusetzen, AB nunmehr nicht durch die Wiederholung von CF genau hervorgebracht werden. Da nun dieses sich so verhält, welchen von den gleichen Theilen der Einheit wir annehmen mögen: so können wir uns allerdings eine Grösse wie AB vorstellen, welche aus gleichen Theilen der Einheit CD niemals zusammengesetzt werden kan, so lange diese Theile eine bestimmte Grösse haben, sie mögen übrigens so klein seyn als sie wollen. Gleichwohl folgt aus demjenigen, was bereits gesagt worden, daß eine jede Grösse AB aus einer jeden Einheit CD, durch eine Rational-Zahl, sie sey nun gantz oder ein Bruch, dergestalt ausgedrückt werden könne, daß wenn sich ein Fehler findet, derselbe doch keine Betrachtung verdienet.

Der 1. Zusatz.

§. 11. Man sieht aus diesen Begriffen von den Zahlen, daß die Grösse einer Zahl so wenig von der Grösse der Einheit abhänge, daß wenn nur in der Wiederholung der Einheit nichts geändert wird, die Zahl bleibt, was auch die Einheit selbst für Veränderungen leiden mag.

Der 2. Zusatz.

§. 12. Hingegen hängt die Grösse, welche durch eine Zahl ausgedrückt worden ist, so wohl von der Zahl selbst, als von der Grösse der Einheit, worauf sich die Zahl beziehet ab, und man hat von jener nicht eher einen Begrif, bis diese beide bekannt sind. Denn es wächst die Grösse nicht nur, wenn bey einerley Einheit die Zahl zunimmt, sondern auch, wenn bey eben derselben Zahl die Einheit vergrössert wird: und eben so wird, wenn eines von diesen beiden abnimmt, auch die Grösse vermindert.

Der 3. Zusatz.

§. 13. Ein Bruch wird durch eine gantze Zahl ausgedrückt, wenn derjenige Theil der Einheit,

aus

aus dessen Wiederholung der Bruch zusammengesetzt ist, selbst vor die Einheit angenommen wird. Es wächst also der Bruch sowohl wenn der Zehler vermehrt wird, indem man die Grösse jenes Theiles beybehält, als auch wenn dieser Theil wächst, indem der Zehler ungeändert bleibt: hingegen wird der Bruch vermindert, wenn entweder der Zthler, oder die Grösse der Theile im Nenner, oder beide zugleich abnehmen.

Der 4. Zusatz.

§. 14. Und wenn, zum Beyspiel, bey eben derselben Zahl, die Einheiten oder die Theile der Einheiten, welche man zehlet, doppelt so groß werden; so wird auch die Grösse, welche durch die Zahl ausgedrückt worden ist, doppelt so groß; werden die Einheiten zehnfach, so wird auch die Grösse zehnfach, u. s. f. Wenn hingegen abermals bey eben derselben Zahl, die Einheiten, oder die Theile der Einheiten die Helften der vorigen werden, so wird auch die Grösse die Helfte der vorigen, werden die Theile zehen mal kleiner, so wird auch die Grösse zehen mal so klein, und so in den übrigen Fällen.

Willkürlicher Satz.

§. 15. Damit wir nicht allein von der Einheit bis auf zehen, zehlen und wieder zurück zehlen, sondern auch grössere Zahlen, uns selbst deutlicher vorstellen, und andern leichter mittheilen können: setzen wir aus zehen einzelnen Einheiten eine neue zusammen, die wir seinen Zehner nennen. Zehen von diesen Zehnern, welche wir nunmehr eben wie die einzelnen Einheiten zehlen, nennen wir ein Hundert, und aus zehen Hunderten setzen wir eine neue Einheit zusammen, welche ein Tausend heißt. Wenn wir nun die Anzahl der Tausende, Hunderte, Zehner, und Einheiten, welche in der gegebenen Zahl enthalten sind, durch Worte ausdrücken, so können wir uns diese Zahl leicht vorstellen.

§. 16. Wir zehlen aber die Tausende auf eben die Art, wie wir die Einheiten zehlten, und machen Zehner oder Hunderte von Tausenden, bis wir auf zehen mal Hundert, oder Tausend mal, Tausend kommen.

§. 17. Tausendmal tausend nennen wir eine Million, und wir zehlen, wenn uns eine so grosse Zahl vorkommt, die Millionen, welche in derselben enthalten sind, eben so wie wir die einzelnen Einheiten zehlten, indem wir nehmlich nach und nach Zehner, Hunderte, Tausende, Zehentausende und Hunderttausende von Millionen machen, bis endlich eine Million von Millionen entstehet.

§. 18. Eine Million von Millionen nennen wir eine Billion, eine Million von Billionen eine Trillion, eine Million von Trillionen eine Quadrillion und so ferner: bey welchen allen

wir

wir im Zehlen nicht anders, als bey den Millionen verfahren; und wir können durch diese wenigen Wörter die allergrößten Zahlen leicht und geschickt ausdrücken.

§. 19. Theilen wir aber die Einheit in gleiche Theile, so nennen wir einen jeden dieser Theile die Helfte der Einheit, oder ein Drittheil, ein Viertheil, ein Fünftheil u. s. f. indem wir die Benennung von der Anzahl der Theile hernehmen, in welche die Einheit getheilt worden ist. Auf eben diese Art benennen wir den zehenten Theil der Einheit, den hundertsten und tausendsten Theil derselben. Es ist aber ein Hunderttheil der zehente Theil eines Zehentheils, ein Tausendtheil der zehente Theil eines Hunderttheils u. s. f.

Anmerckung.

§. 20. Wir können daher eine jede Zahl, in welcher wir uns ausser den gantzen Einheiten keine andre Theile derselben vorstellen als Zehentheile, Hunderttheile, Tausendtheile u. s. f. aus verschiednen Ordnungen von Einheiten zusammensetzen, welche in Absicht der Grösse von einander unterschieden sind, so daß deren einige höher sind als die Ordnung der einzelnen Einheiten, als die Zehner, Hunderte und Tausende, andre niedriger, die Zehentheile, Hundertheile, Tausendtheile. Bey allen diesen Ordnungen ist das allgemeine Gesetz, daß eine jegliche Einheit einer Ordnung, so viel ausmacht

macht als zehen Einheiten der nächsten niedrigern, hingegen nur den zehenten Theil einer Einheit von der nächsten höhern Ordnung.

Willkürlicher Satz.

§. 21. Auf diese Art ausgedrückte Zahlen, werden durch neun Zeichen, welche zu unsern Zeiten jedermann bekannt sind, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, und die wir Zifern nennen, geschrieben. Wir stellen uns vor, daß die Reihe, in der wir schreiben, in gewisse Plätze abgetheilet sey, deren jeden eine von diesen Zifern einnehmen wird: wir zehlen aber diese Plätze, nach Art der Morgenländer, von der Rechten zur Lincken. Einen von diesen Plätzen bestimmen wir vor die einzelnen Einheiten, den nächsten vor die Zehner, den folgenden vor die Hunderte u. s. w. so daß wir in einen jeden dieser Plätze eine Zifer schreiben, welche andeutet, wie viel die Zahl Einheiten, Zehner, Hunderte u. s. w. enthalte. In denjenigen Platz aber, welcher zunächst vor dem Platz der einzelnen Einheiten stehet, setzen wir eine Zifer, welche die Zahl der Zehentheile von der Einheit ausdrückt, in den nächsten Platz vor diesem, die Zifer, welche die Zahl der Hunderttheile bestimmt, und so ferner.

§. 22. Wenn von dieser oder jener Ordnung keine Einheiten vorhanden sind, folglich der Platz, welchen

chen das Zeichen der Anzahl dieser Einheiten einnehmen solte, leer bleiben würde, füllen wir denselben mit einem hohlen Punct o, welches Null genennt wird, damit die Ordnungen nicht vermischt werden mögen. Den Platz aber der einzelnen Einheiten bezeichnen wir mit einem Comma (,), welches zur rechten Seite der Zifer, welche die einzelnen Einheiten bedeutet, geschrieben wird: es wäre denn, daß diese Zifer die erste unter allen wäre, aus denen die Reihe besteht, in welchem Falle dieses Zeichen (,) überflüßig ist.

§. 23. Hieraus folgt, daß eine folgendergestalt geschriebene Zahl 306, 27 sechs einfache Einheiten, keinen Zehner, drey Hunderte, und ausserdem zwey Zehentheile und sieben Hunderttheile enthalte. Und fast eben so leicht findet man die Bedeutung der auf nachstehende Art geschriebenen Zahlen: 327; 95476; 47083700; 27,05; 18,0004; 0,451; 0,8005; 0,0009. Ueberall ist die Einheit, welche durch eine in einem gewissen Platze geschriebene Ziffer oder o ausgedrückt wird, so groß, als zehen Einheiten des nächst vorhergehenden Platzes.

Der 1. Zusatz.

§. 24. Wenn der Platz der einfachen Einheiten bleibt, so wird eine Zahl, welche nach den obigen Gesetzen durch Zifern ausgedrückt worden, durch Hinzu-

Hinzusetzung irgend einer Anzahl von Nullen, auf einer oder der andern Seite der Zifern, keineswegs verändert: es kan also die Zahl 23,47 auch folgendermassen 0023,47; oder 23,47000 oder 0023,470 oder auf viele andre Arten geschrieben werden.

Der 2. Zusatz.

§. 25. Wird aber in einer folgendermassen geschriebenen Zahl 0023,470 oder in einer jeden andern, das Zeichen der Stelle der einzelnen Einheiten (,) von seinem Platz in den nächst vorhergehenden anf diese Art versetzt 00234,70, so wird diejenige Ziffer, welche vorher die Zehentheile zehlte, nunmehr die einfachen Einheiten zehlen, diejenige, welche die Hunderttheile gezehlet hat, zehlt jetzt die Zehentheile, die Zifer der Einheiten zehlt Zehner, und überhaupt zehlt eine jede Zifer nunmehr Einheiten, welche zehnmal so groß sind, als diejenigen, so sie vorher ausdrückte. Es wird also durch diese Versetzung des Zeichens (,), die Zahl zehenmal so groß gemacht (§. 14.).

Der 3. Zusatz.

§. 26. Wenn daher in eben derselben Zahl, 0023,470 dieses Zeichen (,) aus seinem Platz in den nächstfolgenden versetzt, und dadurch herausgebracht wird 002,3470; so wird diese Zahl zehen mal so klein, oder der zehente Theil der vorigen, indem alle Einheiten jetzt eben so verkleinet werden, als sie vorhin vergrössert wurden. Auf eben diese

Art

Art wird eine Zahl hundertmal grösser, wenn das Zeichen (,) um zween Plätze vorwärts gesetzt wird, und hundert mal kleiner, wenn man eben dieses Zeichen um zween Plätze zurück ziehet; woraus leicht einzusehen ist, auf welche Art eine Zahl tausend- oder zehentausendmal grösser oder kleiner gemacht werde, u. s. f. Die Zahl 002347,0 oder 2347, ist hundertmal so groß als 0023,470; die Zahl 23470, ist tausendmal so groß als diese letzte, und 2347000 hundert tausendmal so groß; hingegen ist der hundertste Theil eben dieser Zahl 0023,470 nichts anders, als 0,2347, das Tausendtheil derselben 0,02347 das Zehentausendtheil 0,002347 und so ferner.

Anmerckung.

§. 27. Nachdem man dieses eingesehen hat, ist es leicht, eine jede Reihe von Zifern, welche nach den obigen Gesetzen aufgeschrieben worden sind, im Fall dieselbe keine kleinere als einzelne Einheiten enthält, durch die Anfangs erklärten Benennungen geschickt auszudrücken, besonders wenn man drey neben einander gesetzte Zifern zu lesen weiß, als diese, 005; 060; 900; 053; 620; 503; 794, welches nicht die geringste Schwierigkeit macht. Man theile eine gegebene Reihe von Zifern in verschiedene Classen, deren jede sechs Zifern enthalte, indem man von derjenigen anfängt, welche die einzelnen Einheiten zehlet, und am Anfange dieser Classen schreibe man die Zeichen °, ′, ″, ‴, u. s. f. Hierauf mache man aus einer jeden dieser

Classen

Classen zwo andere von drey Zifern folgendergestalt:

5 | 329'' | 870 | 325' | 743 | 297°, 174

Ist dieses geschehen, so mache man mit denjenigen Zifern den Anfang, welche die Einheiten der größten Ordnung zehlen, und gehe nach und nach zu den niedrigern Ordnungen über. Man lese eine jede Classe von dreyen oder weniger Zifern und bemercke, daß diese Zifern einfache Einheiten zehlen, wenn sich am Ende der Classe das Zeichen ° befindet, hingegen Millionen, wenn bey der letzten Zifer der Classe das Zeichen ' stehet, Billionen, wenn wir '' finden, u s f. die übrigen Classen hingegen von dreyen Zifern, an deren Ende sich kein dergleichen Merckmal befindet, zehlen Tausende solcher Einheiten, deren Ordnungen durch die Zeichen °, ', '', angezeigt werden, welche zunächst auf diese Classen folgen. Es wird also die vorstehende Zahl folgendergestalt ausgesprochen: 5 tausend und 329 Billionen; 870 tausend 325 Millionen; 743 tausend 297 mal Eins.

§. 28. Diejenigen Zifern, welche Einheiten von einer niedrigern Ordnung, als die einzelnen sind, ausdrücken, werden selten gelesen. Soll dieses aber geschehen, so sieht man aus dem vorigen leicht, wie es zu machen sey.

Willkürlicher Satz.

§. 29. Wir schreiben einen Bruch, indem wir einen Querstrich ziehen, und den Zehler über diesen

diesen Strich, den Nenner hingegen unter denselben setzen, auf folgende Art: $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{18}{35}$, oder wenn, welches doch ordentlicher weise nicht geschiehet (§. 8.), auch die Glieder einer gebrochenen Zahl Brüche sind, folgendergestalt;

$\frac{3\frac{1}{2}}{7}$, $\frac{5\frac{2}{3}}{13}$, $\frac{3}{7\frac{4}{5}}$, $\frac{5\frac{2}{3}}{7\frac{4}{5}}$.

Anmerckung.

§. 30. Es ist also $\frac{3}{10}$ eben so viel als 0, 3; und $\frac{47}{100}$ so viel als 0, 47; $\frac{94}{1000}$ so viel als 0, 094; welches man auch so ausdrückt: $\frac{3}{10} = 0, 3$; $\frac{47}{100} = 0,47$; $\frac{94}{1000} = 0, 094$, indem das Zeichen (=) die Gleichheit derjenigen Dinge andeutet, zwischen welchen es stehet.

Erklärung.

§. 31. Wenn die Zahl S, zwoen oder mehrern andern Zahlen A, B, C, zusammengenommen, gleich ist, so heißt S die Summe dieser Zahlen. Die Zahl A aber zu der Zahl B addiren oder hinzusetzen, heißt die Summe dieser beiden Zahlen finden. Wenn man zu derselben ferner C setzet, so kommt die Summe der Zahlen A, B und C heraus, u. s. w.

§. 32. Die Differenz oder der Unterschied zwoer ungleicher Zahlen A und B, ist diejenige Zahl, welche ausdrückt, um wie viel die grössere von den gegebenen Zahlen A die kleinere B übersteigt. Und die kleinere von der grössern Subtrahiren, oder Abziehen, heißt den Unterschied dieser Zahlen finden.

Anmerckung.

§. 33. Wir mögen nun die Zahl B zu der Zahl A addiren, oder diese von jener abziehen sollen, so müssen die Einheiten in diesen Zahlen gleich seyn. Folglich sind auch die Einheiten in der Summe und der Differenz eben diesen Einheiten gleich.

§. 34. Wenn S die Summe der Zahlen A und B ist; so bleibt, wenn eine dieser Zahlen B von S abgezogen wird, die andre Zahl A übrig. Und wenn man den Unterschied der Zahlen A und B zu der kleinern Zahl B addiret, kommt die grössere Zahl A heraus.

Aufgabe.

§. 35. Verschiedne nach den §. 21. 22. gegebenen Gesetzen ausgedrückte Zahlen, deren einzelne Einheiten einander gleich sind, zu addiren.

Auflösung.

357	3,52	0,3724
8429	14,7	0,042
25	0,83	0,73
790	34,	0,004
9601	53,05	1,1484

Man

Man schreibe die gegebenen Zahlen dergestalt auf, daß diejenigen Zifern, welche Einheiten von einerley Ordnung zehlen, in einer Reihe gerade übereinander stehen. Hierauf fange man von denjenigen Zifern an, deren Einheiten die kleinsten sind, und mache nach und nach die Summen der Einheiten in einer jeden Reihe. Wenn eine dergleichen Summe Zehner enthält, so trage man dieselben in die nächst folgende Reihe über, um sie zu den Einheiten jener Reihe zu addiren, die übrigen Einheiten aber, welche sich ausser den Zehnern in der Summe befinden, mercke man unter dieser Reihe an. So werden die Zifern, welche unter einer jeden Reihe geschrieben sind, Einheiten von eben der Ordnung anzeigen, als die Zifern der gantzen Reihe enthalten: alle Zifern aber, welche auf diese Art aus allen Reihen zusammengesetzt werden, drücken die Summe aller gegebenen Zahlen aus.

Beweis.

Es ist klar, daß in derjenigen Zahl, welche durch die unter denen Reihen geschriebene Zifern ausgedrückt wird, alle Einheiten der gegebenen Zahlen, von welcher Ordnung sie auch seyn mögen, enthalten sind.

Zusatz.

§. 36. Brüche von einerley Einheit, welche gleiche Nenner haben, werden addiret, wenn man ihre Zehler addiret, und den Nenner stehen läßt. Denn es sind in diesem Falle die Einheiten, welche durch die Nenner ausgedrückt werden, einander gleich (§. 13).

So ist die Summe der Brüche $\frac{2}{4}$, $\frac{1}{4}$ der Bruch $\frac{3}{4}$, und die Summe von $\frac{2}{7}$, $\frac{5}{7}$ und $\frac{3}{7}$ ist $\frac{10}{7}$.

Aufgabe.

§. 37. **Wenn zwo Zahlen gegeben sind, welche Einheiten von allerley der §. 20. angenommenen Ordnungen enthalten, die kleinere von der grösseren abziehen.**

Auflösung.

5672	3'45'8	3'0'0'0
4261	1539	985
1411	1919	2015
5,3'21	0,57'0'0	6,'0'0'0
3,251	0,0327	0,213
2,070	0,5373	5,787

Man schreibe die Zahlen abermals so, daß diejenige Zifern, welche Einheiten von einerley Ordnung ausdrücken, in einer Reihe übereinander stehen. Hierauf fange man von den Zifern an, deren Einheiten die kleinsten sind, und gehe von

diesen

diesen zu den grössern fort. Man ziehe die Anzahl der Einheiten einer jeden Ordnung, die in der kleinern Zahl enthalten sind, von der Anzahl eben dieser Einheiten in der grössern Zahl ab, wenn nehmlich in der grössern Zahl mehr Einheiten dieser Ordnung sind, als in der kleinern, und schreibe den Ueberschuß unter die Reihe dieser Einheiten. Sind aber in der grössern Zahl weniger Einheiten dieser Ordnung enthalten, als in der kleinern, so theile man eine der Einheiten der nächst folgenden Zifer, in zehen Einheiten derjenigen Ordnung, bey welcher man jetzt die Subtraction verrichten will, und ziehe nunmehr von diesen zehen Einheiten, nachdem man sie zu den Einheiten eben dieser Ordnung, welche sich vorher in der grössern Zahl befanden, addiret hat, die Einheiten in der kleinern Zahl würcklich ab. Was übrig bleibt, wird wie vorher unter der Reihe angemerckt. Diejenige Zifer aber in der grössern Zahl, von welcher eine Einheit, in zehen Einheiten der nächsten kleineren Ordnung getheilet worden ist, wird nun bey Fortsetzung des Abziehens, eine Einheit weniger enthalten, oder eins weniger bedeuten. Auf diese Art verfahre man bis ans Ende. Es werden alsdenn die unter einer jeden Reihe geschriebene Zifern, Einheiten enthalten, welche den Einheiten derselben Reihe gleich sind, und alle diese Zifern geben, wenn sie nach den obigen Gesetzen ausgesprochen werden, die verlangte Differenz.

Beweis.

Es enthält nehmlich die Zahl, welche durch diese Zifern ausgedrückt wird, den Ueberschuß der Einheiten von allen Ordnungen in der grössern Zahl, über die Einheiten von allen Ordnungen in der kleinern.

Zusatz.

§. 38. Man findet den Unterschied zweyer Brüche von einerley Einheit, deren Nenner gleich sind, wenn man den kleinern Zehler von dem grössern abzieht, und den Nenner stehen läßt. So ist der Unterschied der Brüche $\frac{3}{4}$ und $\frac{1}{4}$ der Bruch $\frac{2}{4}$, und der Unterschied von $\frac{5}{7}$ und $\frac{2}{7}$ ist $\frac{3}{7}$.

Anmerckung.

§. 39. Wenn wir mit Berechnung der Dinge beschäftiget sind, so ist uns von Natur, und ohne Lehrmeister bekannt, in welchem Falle wir addiren, und in welchem wir subtrahiren müssen. Diejenigen, welche ihre Einnahmen und Ausgaben berechnen, schreiben jene und diese besonders auf, und addiren sowohl die Ausgaben, als die Einnahmen. Alsdenn ziehen sie die kleinere Summe von der grössern ab: und schliessen, wenn die Summe der Einnahmen grösser ist, daß ihr Vermögen, um so viel, als der entdeckte Unterschied beträgt, vermehrt worden sey; ist hingegen die Summe der Ausgaben grösser,

grösser, so ziehen sie daraus die Folge, ihr Vermögen sey um so viel, als eben dieser Unterschied ausmacht, vermindert worden.

§. 40. Es kan aber eine dergleichen Berechnung öfters auf nachfolgende Art abgekürtzet werden. Man unterscheide diejenigen Zahlen, welche die Einnahme ausdrücken, von denen, welche die Ausgaben andeuten, durch ein beliebiges Zeichen. Es sey das Zeichen der Einnahmen +, der Ausgaben hingegen —, und die Zahlen seyn mit diesen Zeichen, in einer beliebigen Ordnung, neben einander geschrieben, als +17 — 13 — 5 + 8 — 2 + 7 — 5: so wird man den Haupt-Endzweck der Berechnung, um wie viel nehmlich das Vermögen, durch alle diese Einnahmen und Ausgaben, vermehrt oder vermindert worden sey, auf die folgende, oder eine andre ähnliche Art, erreichen: +17 — 13 ist so viel als +4, wenn wir hiezu — 5 setzen, erhalten wir — 1; nun aber ist — 1 + 8 nichts anders als + 7, und dieses mit — 2 giebt + 5, welches mit +7 zusammen genommen + 12, und dieses mit — 5 endlich +7 hervorbringt. Es ist also 7 der Ueberschuß aller Einnahmen über die Ausgaben, und um diesen Ueberschuß ist das Vermögen vermehrt worden. Da aber in einem andern Exempel + 12 — 15 — 2 + 4 — 5, wenn man eben wie vorhin verfähret, — 6 heraus kommt, so zeigt dieses an, daß die Ausgaben die Einnahmen um die Zahl 6 übersteigen, und folglich das Vermögen um sechs solche Einheiten, als die Zahlen in der Berechnung angedeutet haben, vermindert worden sey.

§. 41. Wenn man auf diese Art rechnet, nimmt man einige durch Zahlen ausgedrückte Grössen vor Positiv an, welche man mit dem Zeichen + bemercket, andre vor Negativ, und diesen giebt man das Zeichen —. Das erste dieser Zeichen wird Plus, das letzte Minus ausgesprochen. Welche Grössen aber positiv, welche negativ anzunehmen sind, ist leicht auszumachen, wenn man auf dasjenige Acht hat, was man zusammen rechnen will. Will jemand den Anwachs seines Vermögens berechnen, so werden die Einnahmen positiv, und die Ausgaben negativ seyn. Will eben dieser hingegen die Abnahme seiner Reichthümer, oder den Anwachs seiner Armuth in Rechnung bringen, so werden ihm jetzt die Ausgaben positive, die Einnahmen hingegen negative Grössen seyn. Welches er aber von beiden erwählen mag, so ist die Rechnung einerley, und wenn die zuletzt durch dieselbe hervorgebrachte Zahl das Zeichen + hat, so bedeutet dieses, daß die dadurch ausgedrückte Grösse unter diejenigen gehöre, welche er als positiv angenommen; hat hingegen diese Zahl das Zeichen —, so wird die Grösse zu den negativen gehören.

§. 42. Es giebt unendliche Gattungen von Grössen, welche auf eben die Art mit einander verglichen werden, wie die Einnahmen mit den Ausgaben, oder diese mit jenen, so daß überall, wenn wir die eine Gattung als positiv ansehen, die entgegengesetzte vor negativ zu achten ist. So wird, wenn der Aufgang positiv ist, der Niedergang negativ seyn, und umgekehrt. Wenn das in ein Gefäß einfliessen-

einfliessende Wasser als positiv betrachtet wird, muß man das ausfliessende vor negativ halten. Ist hingegen das ausfliessende Wasser positiv, so muß das einfliessende negativ genennt werden. Ist eine aufwärts würckende Kraft positiv, so wird diejenige, so unterwärts wirckt, negativ seyn, und so in allen dergleichen Fällen.

§. 43. Eine Grösse, die durch eine Zahl ausgedrückt wird, welcher keines der beiden Zeichen Plus, Minus vorgesetzet ist, wird allezeit als positiv angesehen.

Erklärung.

§. 44. Eine gegebene Zahl N durch eine andre M multipliciren, heißt aus der Zahl N eine neue Zahl P auf eben die Art hervorbringen, wie M aus der Einheit entstanden ist. Die Zahl N ist die zu multiplicirende Zahl, oder der Multiplicandus, M multipliciret und wird der Multiplicator, P aber das Product, oder Factum genennet.

§. 45. Eine gegebene Zahl N durch eine andre D dividiren, heißt aus N eine neue Zahl Q auf eben die Art hervorbringen, wie aus D die Einheit entstehet. Die Zahl N ist die zu dividirende Zahl, oder der Dividendus; D soll dividiren und wird der Divisor, Q aber der Quotient genennet.

Anmerckung.

§. 46. Die Zahl N mag seyn welche sie will, so ist der Multiplicator M und der Divisor D entweder eine gantze Zahl, oder ein Bruch. Ist der Multiplicator eine gantze Zahl, so entstehet er aus der Einheit, wenn man diese wiederholet, oder etliche Einheiten von gleicher Grösse addiret. Also wird man auch das Product, durch die Wiederholung des Multiplicandus, oder durch die Addition einiger ihm gleichen Zahlen, herausbringen.
Fig. 2. Und wenn die Zahl AB, welche aus Einheiten oder Theilen derselben, nach Belieben zusammengesetzt worden, durch die gantze Zahl CD multipliciret wird, so kömmt das, in Gestalt eines Vierecks geschriebene Product ABEF heraus; und die Einheiten dieses Products, sind den Einheiten der multiplicirten Zahl AB gleich, was vor Einheiten auch der Multiplicator CD enthalten mag.

§. 47. Ist aber der Divisor eine gantze Zahl, so entstehet die Einheit aus demselben, wenn man ihn in so viele gleiche Theile theilet, als Einheiten darinnen enthalten sind. Es wird also auch der Quotient hervorgebracht, wenn man die zu dividirende Zahl in eben so viele gleiche Theile theilet. Soll eine Zahl durch CD dividiret werden, so schreibe man dieselbe bey ABEF in Gestalt eines Vierecks, auf solche Art, daß eine jede neben CD herablaufende Reihe, wie BF, ebenso viele Einheiten, oder gleiche Theile der Einheit, als der Divisor CD, enthalte; und es wird in diesem Fall AB der Quotient seyn,

dessen

dessen Einheiten den Einheiten des Dividendus ABEF gleich sind, die Einheiten des Divisors mögen so groß, oder so klein seyn als sie wollen.

§. 48 Es kan also einerley Zahl N durch eine gegebene Zahl D auf viele Arten dividiret werden. Die leichteste ist, daß man eine jede Einheit in dem Dividendus N in so viele gleiche Theile theilet, als D Einheiten in sich fasset, und diese Theile in Gestalt eines Vierecks, wie bereits gezeigt worden, aufschreibet. Denn es wird alsdenn eine jede neben CD herablaufende Reihe von Theilchen, eine von den Einheiten enthalten, aus deren Theilung diese Theilchen entstanden sind. Folglich wird der Quotient ein Bruch, dessen Zehler der Dividendus, der Nenner hingegen der Divisor ist. Und es hat allzeit, wenn N durch D dividiret werden soll, der Quotient diese Gestalt $\frac{N}{D}$.

§. 49. Diese Art zu dividiren hat wenig Schwierigkeit, so lange N und D kleine Zahlen sind; und wenn der Dividendus kleiner ist als der Divisor, so ist sie die einzige, die man gebrauchen kan. Sind aber die Zahlen grösser, so ist der Ausdruck $\frac{N}{D}$ wegen der Menge der Theile nicht so leicht zu verstehen. Es wird also in diesem Falle die Division dergestalt vollzogen, daß man so viele gantze Einheiten absondert, als möglich ist. Dieses geschiehet, wenn aus den Einheiten des Dividendus, so viele herablaufende Reihen, wie AE, gemacht werden, als

als man herausbringen kan, aus den noch übrigen Einheiten aber, wenn sich deren finden, ein Bruch, wie vorhin gewiesen worden ist, gemacht wird. Der erste Theil des auf diese Art ausgedrückten Quotienten, ist eine gantze Zahl, welche anzeigt, wie oft so viele Einheiten, als der Divisor enthält, von dem Dividendus abgezogen werden können: der andre Theil, welcher meistentheils hinzugesetzt werden muß, ist ein Bruch, dessen Zehler die noch übrigen Einheiten des Dividendus enthält, und dessen Nenner der Divisor selbst ist.

§. 50. Da aber ein Bruch als $\frac{5}{7}$ aus der Einheit entstehet, wenn man diese in so viele gleiche Theile theilet, als der Nenner des Bruchs Einheiten enthält, und hierauf von diesen Theilen $\frac{1}{7}$, so viele in den Bruch aufnimmt, als Einheiten in dem Zehler sind: so wird, wenn die Zahl N durch einen Bruch zu multipliciren ist, das Product gefunden werden, wenn man diese Zahl durch den Nenner des Bruchs dividiret, und den Quotienten durch den Zehler multipliciret.

§. 51. Hingegen wird aus dem Bruch $\frac{5}{7}$ die Einheit, wenn man denselben in so viele gleiche Theile theilet, als Einheiten in seinem Zehler enthalten sind, und den dergestalt hervorgebrachten Theil $\frac{1}{7}$ so oft wiederholet, als viele Einheiten der Nenner in sich fasset. Es wird daher auch die Division einer jeden Zahl N durch den Bruch $\frac{A}{B}$ vollzogen, wenn man diese Zahl durch den Zehler

des

Bruchs A dividiret, und den Quotienten durch den Nenner B multipliciret.

§. 52. Das Zeichen der Multiplication ist dieses $\times$, welches zwischen die zu multiplicirende Zahlen folgendermassen gesetzt wird 3×4: zuweilen braucht man auch das (.) auf eben diese Art, woraus leicht einzusehen ist, was $3\times4=3.4=12$ bedeute. Wenn aber Zahlen, deren eine durch die andre zu multipliciren ist, durch Buchstaben angedeutet werden, so werden diese, ob man sie gleich durch eben diese Zeichen verknüpfen kan, öfters ohne ein dazwischen gesetztes Zeichen neben einander geschrieben.

§. 53. Den Quotienten, welcher herauskommt, wenn man die Zahl A durch die Zahl B dividiret, braucht man nicht anders, als durch den Bruch $\frac{A}{B}$ zu bezeichnen.

Der 1. Zusatz.

§. 54. Man siehet aus Fig. 2. daß wenn das Product durch den Multiplicator, im Fall dieser eine gantze Zahl ist, dividiret wird, nichts anders, als die multiplicirte Zahl herauskomme: und daß, wenn man den Quotienten durch den Divisor, im Fall dieser gleichfalls eine gantze Zahl ist, multipliciret, nichts anders als die dividirte Zahl, hervorgebracht werden könne.

Der

Der 2. Zusatz.

§. 55. Da aber aus dem, was in der Anmerckung gesagt worden ist, folget, daß eben dieses wahr sey, wenn der Multiplicator, oder der Divisor Brüche sind, so wird allzeit, wenn eine Zahl N durch eine andre Zahl M multipliciret worden ist, im Fall man das Product durch den Multiplicator M dividiret, die Zahl N wieder hervorgebracht. Und wenn man die Zahl N durch D dividiret hat, nunmehr aber den Quotienten durch eben dieses D multipliciret, so kommt wieder N heraus, es mag nun D eine gantze Zahl, oder ein Bruch seyn: so daß überhaupt die Division der Multiplication, und jene dieser, dergestalt entgegen gesetzt ist, daß alles, was durch die eine entstanden war, durch die andre wieder auf das vorige zurückgebracht wird. Es ist nehmlich, was auch A und B vor Zahlen bedeuten mögen, $\frac{A \times B}{B} = A$.

Der 3. Zusatz.

§. 56. Wenn man also die Zahl N in zwey Theile P und R theilet, so daß $N = P + R$, so ist auch, im Fall einer dieser Theile P durch D dividiret, den Quotienten Q gegeben hat, $N = Q \times D + R$.

Der 4. Zusatz.

§. 57. Wenn die Zahl N, welche aus den zwey Theilen A und B zusammengesetzt worden ist, so daß $N = A + B$, durch die Zahl M multipliciret werden soll; so ist das Product $M \times N = M \times A + M \times B$.

Wenn

Wenn daher $N = A - B$, so wird das Product $M \times N = M \times A - M \times B$ seyn.

Der 5. Zusatz.

§. 58. So wird auch, wenn die aus zweyen Theilen, A und B, zusammengesetzte Zahl $N = A + B$ durch D zu dividiren ist, der Quotient $\frac{N}{D} = \frac{A}{D} + \frac{B}{D}$ seyn: ist aber $N = A - B$, so ist $\frac{N}{D} = \frac{A}{D} - \frac{B}{D}$.

Der 6. Zusatz.

§. 59. Wird der Multiplicator verdoppelt, so wird auch das Product verdoppelt, denn es geschieht nunmehr dasjenige zweymahl, was mit dem einfachen Multiplicator nur einmahl verrichtet wurde: und überhaupt, wenn der Multiplicator durch eine gantze Zahl multipliciret wird, so wird das Product durch eben diese Zahl multipliciret.

Der 7. Zusatz.

§. 60. Es ist leicht einzusehen, daß eben dieses auch von dem Multiplicandus richtig sey; und es folgt hieraus ferner, daß wenn man eine von diesen beiden Zahlen durch eine gantze Zahl dividiret, durch eben diese Zahl das Product dividiret werde.

Der 8. Zusatz.

§. 61. Wenn man den Dividendus verdoppelt, oder überhaupt durch irgend eine gantze Zahl multipliciret, so wird, wenn der Divisor bleibt, der

Quotient

Quotient verdoppelt, oder durch eben die Zahl multipliciret. Multipliciret man aber den Divisor durch eine gantze Zahl, so wird der Quotient durch eben diese Zahl dividiret.

Der 9. Zusatz.

§. 62. Daher auch, wenn man den Dividendus durch eine gantze Zahl dividiret, der Quotient durch eben diese Zahl dividiret wird. Bleibt aber der Dividendus, und man dividiret den Divisor durch eine gantze Zahl, so wird durch eben diese Zahl der Quotient multipliciret.

Aufgabe.

§. 63. Eine Zahl, welche aus verschiednen Einheiten derer §. 20. beschriebenen Ordnungen bestehet, durch eine andre dergleichen Zahl zu multipliciren.

Der 1. Fall.

§. 64. Es sey die folgendergestalt ausgedrückte Zahl 35,724 durch eine gantze Zahl von einer einzigen Ziser zu multipliciren, welche einzelne Einheiten enthält, als 3 oder 5. So kan, wenn man die zu multiplicirende Zahl so oft schreibt, als oft die Einheit in dem Multiplicator begriffen ist, das Product durch die Addition (§. 46.) auf folgende Art gefunden werden.

35,724

35,724	oder	35,724
35,724		35,724
35,724		35,724
107,172		35,724
		35,724
		178,620

§. 65. Wenn die Einheiten des Multiplicators nicht einzelne sind, sondern zu Ordnungen gehören, die entweder höher oder niedriger sind, als die Ordnung der einzelnen Einheiten, so wird das Product herausgebracht, wenn man, nachdem die vorige Arbeit verrichtet worden, das Zeichen der Stelle der einzelnen Einheiten vor- oder zurück setzet, oder am Ende Nullen hinzufüget (§. 26.) Also wird aus der Zahl 35,724, welche durch 3 multipliciret, 107,172 gegeben hat, wenn man sie durch 30 multipliciret 1071,72; multipliciret man sie durch 300, so entsteht 10717,2; durch 3000, 107172; und endlich durch 30000; 1071720. Wenn hingegen eben diese Zahl durch 0,3 multipliciret wird, so kömmt das Product 10,7172 heraus, durch 0,03 das Product 1,07172; durch 0,003, wird es 0,107172; u. s. f.

§. 66. Wenn man eine Tafel, welche alle Producte enthält, die durch die Multiplication einer jeden Zahl von einer Zifer, durch eine jede andre dergleichen Zahl hervorgebracht werden, im Gedächtniß, oder vor Augen hat, (eine solche Tafel wird das Einmahl Eins genennet, und ist hier eingerückt worden):

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

So kan man die Arbeit nach folgenden Vorschriften leicht abkürtzen:

$$\begin{array}{r} 35,724 \\ 3 \\ \hline 107,172 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 35,724 \\ 5 \\ \hline 178,620 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 35,724 \\ 30 \\ \hline 1071,72 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 35,724 \\ 0,3 \\ \hline 10,7172 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 35,724 \\ 300 \\ \hline 10717,2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 35,724 \\ 0,03 \\ \hline 1,07172 \end{array}$$

Der

Der 2. Fall.

§. 67. Ist aber eine eben dergleichen Zahl 35,724 durch eine gantze Zahl zu multipliciren, welche mit mehreren Zifern ausgedrückt wird, als durch 2753; so multipliciret man jene Zahl auf obige Art, zuerst durch die Zahl der einzelnen Einheiten im Multiplicator 3, hiernächst durch die Zahl der Zehner 5, und so weiter, und bringt hierauf durch die Addition das Product heraus, nach folgender Vorschrift

```
   35,724
     2753
---------
  107,172
  1786,20
  25006,8
  71448,
---------
98348,172
```

§. 68. Gehören aber die Einheiten, welche die letzte Zifer des Multiplicators ausdrückt, nicht unter die einzelnen, so macht man das Product vollkommen so, als wenn sie darunter gehörten, und setzt hiernächst das Zeichen der Stelle der einzelnen Einheiten vor- oder rückwärts, nachdem es die Ordnungen der Einheiten im Multiplicator erfordern (§. 26). Wenn also in dem jetzigen Falle der Multiplicator nicht 2753, sondern 27530 ist, so wird auch das Product nicht 98348,172 sondern 983481,72 seyn; und wenn der Multiplicator 275300 wäre, so wäre das Product 9834817,2.

Ist hingegen der Multiplicator 275,3, so ist das Product 9834,8172, ist jener 27,53, so ist dieses 983,48172, u. s. f.

§. 69. Hieraus folgt, daß wenn am Ende des Multiplicandus, oder des Multiplicators, oder beider, sich Nullen finden, allzeit in dem Product so viele Nullen seyn werden, als in dem Multiplicandus und dem Multiplicator zugleich sind. Und wenn die multiplicirende oder die multiplicirte, oder beide Zahlen, zehntheilige Brüche enthalten, so werden in dem Product so viele Zifern seyn, welche zu den zehntheiligen Brüchen gehören, als dergleichen Zifern in dem Multiplicator und dem Multiplicandus zusammen sind. Wir brauchen also, da dieses sich so verhält, unter dem multipliciren nicht einmahl auf die Bedeutung der Zifern, in Absicht auf die Ordnungen der Einheiten, acht zu haben, sondern wir multipliciren in allen bis hieher abgehandelten Fällen auf einerley Art. Denn wenn die Zifern des Products gefunden sind, so können wir die Frage, welche von denselben die einzelnen Einheiten andeute, aus der Anzahl der Nullen, oder der Zifern, die so wohl in dem Multiplicator als dem Multiplicandus die Ordnungen der Einheiten ausdrücken, welche niedriger sind, als die einzelnen, leicht ausmachen; wie in den folgenden Exempeln.

571000	5,71
2300	2,3
1713	1713
1142	1142
1313300000	13,133
2,475	0,0457
9,64	2,31
9900	457
14850	1371
22275	914
23,85900	0,105567
3,244	0,00792
6400	0,043
12976	2376
19464	3168
20761,600	0,00034056

Nachdem die Stelle der einzelnen Einheiten bestimmt worden ist, können die überflüssigen Nullen ausgelöscht werden.

Beweis.

Wenn man auf alle vorgenommene Arbeiten Achtung giebt, so siehet man leicht, daß durch dieselben aus dem Multiplicandus eine neue Zahl auf eben die Art hervorgebracht werde, wie der Multiplicator aus der Einheit entstehet: und daß folglich diese neue Zahl diejenige sey, welche durch das multipliciren verlangt wird (§. 44.).

Aufgabe.

§. 70 Eine Zahl, welche verschiedne Einheiten derer bisher betrachteten Ordnungen enthält (§. 20.), durch eine andre dergleichen Zahl dergestalt zu dividiren, daß der Quotient, so weit dieses angeht, durch eine eben dergleichen Zahl ausgedrückt werde.

Der 1. Fall.

§. 71. Es sey zuerst eine gantze Zahl durch eine gantze Zahl zu dividiren: so muß man den Divisor von dem Dividendus so oft abziehen, als es möglich ist, und anmercken, wie oft dieses geschehen sey. Die Zahl, welche dieses ausdrückt, wird der gröste Theil des Quotienten seyn, und denselben so weit enthalten, als er in einer gantzen Zahl geschaffet werden kan (§. 49.). Wenn man hierauf noch einen Bruch hinzufüget, dessen Zehler der Ueberschuß von der letzten Subtraction, der Nenner hingegen der Divisor selbst ist, so ist der verlangte Quotient gefunden.

Es sey die Zahl 1162 durch 382 zu dividiren. Wenn man die Subtraction nach folgender Vorschrift, so lange es geschehen kan, wiederholet:

1162

```
1162
 382
----
 780
 382
----
 398
 382
----
  16
```

so wird, weil der Divisor von dem Dividendus dreymal hat abgezogen werden können, und der Ueberschuß 16 ist, der Quotient seyn $3\frac{16}{382}$.

§. 72. Weil aber dieses wiederholte Abziehen bey einem grösseren Quotienten sehr mühsam seyn würde, so pflegt man von der zu dividirenden Zahl nicht den Divisor selbst, sondern gewisse Producte abzuziehen, welche entstehen, wenn dieser Divisor durch geschickte Zahlen multipliciret wird. Da nehmlich ein jedes Product, welches durch die Multiplication des Divisors entstanden ist, den vorgesetzten Zweck erreichen könnte; so bedient man sich doch hier bey der Multiplication des Divisors keiner andern Zahlen, als solcher, die nur mit Einer bedeutenden Zifer geschrieben werden, dergleichen sind: 2000, 100, 30, 3 u. s. f. und zwar nimt man allzeit den größten Multiplicator von dieser Art, welchen man brauchen kan. Diese Producte werden leicht gemacht, und vermindern doch die Anzahl der Subtractionen hinlänglich. Man nimmt aber allzeit die größten von diesen Producten zuerst, und gehet nach und nach zu den kleineren über, weil dadurch, wenn man dieselben nach einander von dem Dividendus abzieht, die Zifern des Quotienten in der gehörigen Ordnung hervorgebracht werden; wie in dem nachstehenden Exempel:

Es sey durch 1827 zu dividiren die Zahl		3898437
So ist 1827 × 2000 =	. . . .	3654000
Subtrahiret, bleibt übrig	. .	244437
Ferner ist 1827 × 100 =	. . . .	182700
Subtrahiret, bleibt übrig	. .	61737
Und 1827 × 30 =	. . . .	54810
Subtrahiret, bleibt übrig	. .	6927
Endlich 1827 × 3 =	. . . .	5481
Subtrahiret, bleibt übrig	. .	1446

Es ist also der Theil des Quotienten, welcher gantze Einheiten enthält 2133, und die erste Zifer desselben 2, ist durch das erste Subtrahiren, die andre 1, durch das zweyte Subtrahiren hervorgebracht worden, und so die übrigen.

§. 73. Wir finden die größten Producte, welche subtrahiret werden können, mit der wenigsten Mühe, wenn wir eine Tafel verfertigen, in welcher sich alle Zahlen befinden, welche entstehen, wenn der Divisor durch die Zifern von 1 bis 9 multipliciret wird. Wenn wir uns einer dergleichen Tafel bey der Division der Zahl 3528950032 durch 8543 bedienen wollen, so wird dieses nach der folgenden Vorschrift gemächlich geschehen:

Tafel

Tafel	Dividendus	Quotient
1) 8543	3528950032	413080
2) 17086	34172.....	
3) 25629	11175....	
4) 34172	8543....	
5) 42715		
6) 51258	26320...	
7) 59801	25629...	
8) 68344	6910..	
9) 76887	0000..	
	69103.	
	68341.	
	7592	
	0000	
	7592	

§. 74. Diese Tafel leistet grossen Nutzen, wenn der Quotient mehrere verschiedene Zifern enthält, oder wenn viele Zahlen durch eine einzige dividiret werden sollen. Sehen wir aber vorher, daß der Quotient nur wenige Zifern enthalten werde, so ist es, zumal wenn auch der Divisor klein ist, unnöthig die ganze Tafel zu verfertigen, und wir machen alsdenn nur diejenigen Theile derselben, welche wir brauchen, auf folgende Art:

Divisor	Dividendus	Quotient
532	145987	$274\frac{219}{532}$
	1064	
	3958	
	3724	
	2347	
	2128	
	219	

§. 75. Ja, wenn der Divisor nur eine einzige Zifer hat, so schreiben wir die Producte, welche subtrahiret werden müssen, nicht einmal auf, sondern wir ziehen sie im Gedächtniß ab, und merken nur die Unterschiede an; folgendergestalt:

Divisor	Dividendus	Quotient
5	357948	$71589\frac{3}{5}$
	02443	

Der 2. Fall.

§. 76. Wenn der Dividendus zehntheilige Brüche enthält, der Divisor hingegen eine gantze Zahl ist, so bringen wir zuerst die Zifern des Quotienten vollkommen auf die vorige Art heraus; und bestimmen hiernächst die Ordnungen der Einheiten, welche durch die Zifern des Quotienten ausgedrückt werden, indem wir das Zeichen der einzelnen Einheiten um so viele Stellen von der letzten Zifer nach

der

der linken Seite fortschieben, als eben dieses Zeichen in dem Dividendus von dessen letzter Zifer nach eben dieser Seite entfernet ist. Da also 145987 durch 532 dividiret, den Quotienten 274 gegeben hat, so wird, wenn man 1459,87 durch eben die Zahl 532 dividiret, der Quotient 2,74 seyn; dividiret man 145,987, so kömt der Quotient 0,274 heraus, von 14,5987, der Quotient 0,0274, und so bey den übrigen (§. 61. 62.).

§. 77. Wir pflegen aber, wenn wir zehntheilige Brüche in den Quotienten gebracht haben, dasjenige was zuletzt von dem wiederholten Abziehen übrig blieb, als in dem §. 74. angeführten Exempel 219, wegzulassen, weil der Bruch $\frac{219}{532}$ dessen Zehler dieser Rest ist, sich nun nicht mehr auf einzelne Einheiten, sondern auf Einheiten von niedrigern Ordnungen beziehen, und folglich nicht so leicht zu übersehen seyn würde. Damit aber dieses ohne einigen beträchtlichen Fehler geschehen möge, setzen wir die Division fort, indem wir am Ende des Dividendus desto mehrere Nullen hinzufügen, je kleiner wir den Fehler in dem Quotienten machen wollen.

Exempel.

Exempel.

Divisor	Dividendus	Quotient
532	1459,870000	2,744116
	1064	
	3958	
	3724	
	2347	
	2128	
	2190 . . .	
	2128 . . .	
	620 . .	
	532 .	
	880 .	
	532 .	
	3480	

Der Fehler in diesem Quotienten ist kleiner als ein Tausendmal tausendstes Theilchen einer einzelnen Einheit.

§. 78. Wir bedienen uns eben dieser Methode, wenn wir eine gantze Zahl durch eine gantze Zahl dividiren, und den Quotienten durch hinzugefügte zehntheilige Brüche der Warheit so nahe bringen wollen, als es in einem besondern Falle erfordert wird, es mag nun der Dividendus grösser seyn als der Divisor, oder kleiner als derselbe. So giebt 8 oder 8,000 rc. durch 11 dividiret, den Quotienten 0,727272 rc.

Der 3. Fall.

§. 79. Wenn die kleinsten Einheiten des Divisors nicht zu der Ordnung der einzelnen, sondern zu einer höhern oder niedrigern Ordnung gehören, das heißt, wenn am Ende des Divisors sich entweder Nullen oder zehntheilige Brüche finden, so verfahren wir anfangs gänzlich auf die schon angezeigte Art; hierauf aber schieben wir das Zeichen der einzelnen Einheiten, von derjenigen Stelle, die dasselbe im Quotienten eingenommen haben würde, wenn dessen letzte Zifer einzelne Einheiten gezehlet hätte, um so viele Zifern nach der linken Seite fort, als viele Nullen dem Divisor angehängt sind, oder wir rücken es um so viele Stellen nach der rechten Seite zurück, als viele Zifern in dem Divisor zehntheilige Brüche bezeichnen. Da also die Zahl 1459,87 durch 532 dividiret, den Quotienten 2,744116 gegeben hat, so kömt, wenn eben diese Zahl durch 5320 dividiret wird, der Quotient 0,2744116 heraus; und wenn der Divisor 53200 ist, so ist der Quotient 0,02744116. Wäre hingegen der Divisor 53,2 so würde der Quotient 27,44116 seyn; wäre jener 5,32 so würde dieser 274,4116, und so in den übrigen Fällen (§. 61. 62.).

Beweis.

Ein jeder, der auf alle geschehene Arbeiten Achtung gegeben hat, wird bemerkt haben, daß der Quotient aus dem Dividendus auf eben die Art hervorgebracht worden sey, wie aus dem Divi-

sor

sor die Einheit entstehet. Dieses aber heißt dividiren (§. 45.).

Der 1. Zusatz.

§. 80. Weil eine Zahl 14 durch eine andere Zahl 3 dividiret, den Quotienten $4\frac{2}{3}$ giebt, der auch durch den Bruch $\frac{14}{3}$ ausgedrückt werden kan, (§. 48. 49): so sieht man hieraus, auf welche Art ein unächter Bruch zu finden sey, welcher einer, aus einer ganzen Zahl und einem Bruch zusammengesetzten Zahl $4\frac{2}{3}$ gleich ist. Wenn man nehmlich die ganze Zahl 4 durch den Nenner des Bruchs 3 multipliciret, und zu dem Product den Zehler des gegebenen Bruchs addiret, so erhält man den Zehler 14 des gesuchten unächten Bruchs, welcher mit dem gegebenen Bruch $\frac{2}{3}$ einerley Nenner hat.

Der 2. Zusatz.

§. 81. Folglich wird auch eine gantze Zahl 5 in einen Bruch, dessen gegebener Nenner 3 seyn soll, verwandelt, wenn man sie durch diesen Nenner multipliciret, und das Product zu dem Zehler des verlangten Bruchs macht. Es ist also $5 = \frac{15}{3}$. Und es kan auch eine jede Zahl wie 5 als ein Bruch betrachtet werden, dessen Nenner die Einheit ist, so daß $5 = \frac{5}{1}$.

Aufgabe.

§. 82. Es werden zwo Zahlen gegeben, welche weder beyde ganz, noch nach Art der

ganzen

ganzen Zahlen durch zehntheilige Brüche ausgedrückt sind; und es ist eine derselben durch die andre zu multipliciren oder zu dividiren.

Der 1. Fall.

§. 83. Wenn die gebrochene Zahl $\frac{A}{B}$ durch die gantze Zahl N zu multipliciren ist, so multiplicire man durch N den Zehler des Bruchs, und behalte den Nenner; so wird $\frac{N \times A}{B}$ das gesuchte Product seyn.

§. 84. Eben diese Multiplication des Bruchs $\frac{A}{B}$ durch die gantze Zahl N kan auch verrichtet werden, wenn man den Nenner B durch N dividiret, im Fall nur der Quotient eine gantze Zahl wird, oder man sich sonst durch die unordentliche Gestalt des Bruchs nicht aufhalten läßt. So giebt der Bruch $\frac{7}{12}$ durch 3 multipliciret $\frac{21}{12}$ oder $\frac{7}{4}$, und $\frac{7}{8}$ durch 3 multipliciret giebt das Product $\frac{21}{8}$ oder $\frac{7}{2\frac{2}{3}}$.

§. 85. Wenn der Bruch $\frac{A}{B}$ durch die gantze Zahl N dividiret werden soll, so multiplicire man den Nenner

Nenner, und behalte den Zehler. Der Quotient wird seyn $\frac{A}{N \times B}$.

§. 86. Gesetzt aber der Zehler des Bruchs liesse sich durch N dergestalt dividiren, daß der Quotient eine gantze Zahl würde, oder man stiesse sich sonst nicht an die ungewöhnliche Gestalt des Bruchs, so dividire man würklich diesen Zehler durch N, und lasse den Nenner stehen. Auf diese Art wird der Bruch $\frac{3}{4}$ durch 3 dividiret $\frac{3}{12}$ oder $\frac{1}{4}$ geben. Dieser aber $\frac{5}{7}$ durch 3 dividiret, giebt den Quotienten $\frac{5}{21}$ oder $\frac{1\frac{2}{3}}{7}$.

Der 2. Fall.

§. 87. Ist der Multiplicator ein Bruch $\frac{N}{M}$, der Multiplicandus sey nun eine gantze Zahl, oder eine gebrochene, so multiplicire man diese durch den Zehler des Multiplicators N (§. 83. 84.), und dividire das Product durch den Nenner desselben (§. 85. 86.). Wenn also die Zahl 5 durch $\frac{2}{3}$ multipliciret werden soll, ist das Product $\frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$. Ist aber durch eben diesen $\frac{2}{3}$ der Bruch $\frac{6}{8}$ zu multipliciren, so wird das Produce $\frac{12}{24}$ oder $\frac{4}{8}$ oder $\frac{6}{12}$ oder $\frac{2}{4}$ seyn, nachdem man sich dieser oder jener Art zu multipliciren bedienet.

§. 88. Wenn eine gantze oder eine gebrochene Zahl durch einen Bruch $\frac{N}{M}$ dividiret werden soll, so dividire man dieselbe durch den Zehler des Bruchs N, (§. 85. 86.) und multiplicire den Quotienten durch den Nenner M (§. 83. 84.). Es sey die Zahl 5 durch $\frac{2}{3}$ zu dividiren, so ist der Quotient $\frac{15}{2}$, oder $7\frac{1}{2}$. Soll aber durch eben diesen $\frac{2}{3}$ der Bruch $\frac{4}{15}$ dividiret werden, so kömmt der Quotient $\frac{12}{30}$, oder $\frac{2}{5}$, oder $\frac{6}{15}$ oder $\frac{4}{10}$ heraus, nachdem man diese oder jene Art zu multipliciren, oder zu dividiren erwählet hat.

Beweis.

Weil der Bruch $\frac{A}{B}$ der Quotient ist, welcher entstehet, wenn man den Zehler durch den Nenner dividiret (§. 48.), so wird dieser Bruch allerdings durch die gantze Zahl N multipliciret, es sey nun, daß man den Zehler A durch dieselbe multiplicire, oder den Nenner B dividire (§. 61. 62.). Und aus eben diesem Grunde wird der Bruch $\frac{A}{B}$ durch die gantze Zahl N dividiret, man mag nun den Zehler A durch N dividiren, oder den Nennner B durch eben diese Zahl N multipliciren. Dieses erweiset den ersten Fall: was bey dem zweyten Fall gesagt worden, folgt hieraus von selbsten; indem wir ordentliche Brüche (Fractiones regulares) angenommen haben, das ist, solche, deren Glieder gantze Zahlen sind. (§. 8.)

Anmerckung.

§. 89. Man wird eine Zahl, welche aus einer gantzen Zahl und einem Bruch zusammengesetzt ist, durch eine andre beliebige Zahl multipliciren, wenn man alle Theile des Multiplicandus, nach und nach, durch alle Theile des Multiplicators multipliciret (§. 57.). Zum Beyspiel:

$$\begin{array}{r} 3 + \frac{2}{3} \\ 4 + \frac{7}{9} \\ \hline 12 + \frac{8}{3} \qquad\quad \\ + \frac{21}{9} + \frac{14}{27}. \end{array}$$

§. 90. Meistentheils aber wird man geschwinder fertig, wenn man dergleichen Zahlen in unächte Brüche verwandelt, (§ 81. und alsdenn die Multiplication verrichtet. Es ist in dem gegebenen Exempel $3\frac{2}{3} = \frac{11}{3}$, und $4\frac{7}{9} = \frac{43}{9}$. Multipliciret man nun $\frac{11}{3}$ durch $\frac{43}{9}$, so kömmt der Bruch $\frac{473}{27}$ heraus, welcher

welcher, wenn der Zehler durch den Nenner dividiret wird, $17\frac{14}{27}$ giebt.

§. 91. Soll eine Zahl, die aus einer gantzen Zahl und einem Bruch zusammengesetzt ist, durch eine andre beliebige Zahl dividiret werden, so erleichtert diese Verwandlung der Zahlen in unächte Brüche die Arbeit noch viel mehr, zumahl wenn auch der Divisor aus einer gantzen Zahl und einem Bruch bestehet. Es sey $3\frac{2}{5}$ durch $2\frac{3}{8}$ zu dividiren; so verwandle man den Dividendus in $\frac{17}{5}$ und den Divisor in $\frac{19}{8}$, und man erhält, wenn man nunmehr dividiret, den Quotienten $\frac{136}{95}$.

Der 1. Zusatz.

§. 92. Wenn man beide Glieder eines Bruchs durch einerley Zahl multipliciret oder dividiret, so wird dadurch der Werth des Bruchs nicht geändert: und es ist allzeit $\frac{A}{B} = \frac{N.A}{N.B}$ (§. 54.).

Der 2. Zusatz.

§. 93. Es wird also ein Bruch, dessen Zehler, oder dessen Nenner, oder dessen beide Glieder, ebenfalls Brüche, oder aus gantzen Zahlen und Brüchen zusammengesetzt sind, in einen ordentlichen Bruch verwandelt, wenn man beide Glieder dieses unordentlichen Bruchs, durch die Nenner der Brüche, welche sich in denselben befinden, multipliciret. So, wenn in dem unordentlichen Bruch $\frac{3\frac{2}{5}}{2\frac{3}{8}}$, beide Glieder durch 5, den Nenner des Bruchs in dem zusammengesetzten Zehler multipliciret werden, kömmt $\frac{17}{10\frac{15}{8}}$ heraus; multipliciret man nun beide Glieder dieses neuen Bruchs, ferner durch 8, welches der Nenner des Bruchs in dem zusammengesetzten Nenner ist, so entstehet nunmehr ein ordentlicher Bruch $\frac{136}{95}$, welcher dem unordentlichen $\frac{3\frac{2}{5}}{2\frac{3}{8}}$ gleich ist.

Zweyter Abschnitt
vornehmlich
Von den Brüchen.

Lehrsatz.

§. 94.

Wenn verschiedne Zahlen, als A, B, C, D, sie mögen nun ganze Zahlen, oder Brüche seyn, in einander zu multipliciren sind, die erste nehmlich durch die zwote, das Product hievon durch die dritte, das neue Product durch die vierte, und so ferner, wenn mehrere Zahlen sind; so wird, man mag die Ordnung der Zahlen verwechseln wie man will, das Product $A \times B \times C \times D$ dadurch nicht geändert.

Beweis.

Wenn man anstatt einer dieser Zahlen A, Eins schreibet, und folglich nunmehr das Product $1 \times B \times C \times D$ zu machen ist; so wird $1 \times B \times C \times D = B \times 1 \times C \times D = B \times C \times 1 \times D = B \times C \times D \times 1$. Ist nun die weggelassene Zahl A zum Beyspiel $= 3$, und man bringt diese Zahl wieder in das Product an alle Stellen der Einheit, so ist offenbar, daß ein jedes der obigen Producte dadurch dreymahl so groß wird, und daß überhaupt $A \times B \times C \times D = B \times A \times C \times D = B \times C \times A \times D = B \times C \times D \times A$, wenn A eine gantze Zahl ist (§. 59. 60.). Ist aber A ein Bruch, als $\frac{2}{3}$, und man bringt denselben wieder an eine jede Stelle der Einheit, so wird ein jegliches der obigen Producte zwey Drittheile desjenigen werden, welches entstanden war, als wir an die Stelle von A Eins geschrieben hatten (§. 61. 62.). Es leistet also in der Multiplication überhaupt eine jegliche Zahl einerley sie mag nun multipliciret werden, oder multipliciren, und dieses mag in dieser oder jener Ordnung geschehen.

Anmerckung.

§. 95. Aus dieser Ursache heißt eine jede der Zahlen A, B, C, D, ein Factor des Products $A \times B \times C \times D$ sie mag nun multipliciret werden, oder in irgend einer Ordnung multiplicieren.

Der 1. Zusatz.

§. 96. Wenn verschiedne Brüche $\frac{A}{P}, \frac{B}{Q}, \frac{C}{R}$, dieselben mögen bedeuten was sie wollen, und die Anzahl derselben mag so groß seyn, als sie will, in einander multipliciret werden, so wird das Product weder

durch

durch die Verwechslung der Zehler, oder der Nenner allein, noch auch durch beider Verwechslung, geändert. Denn wenn man an statt der gegebenen Brüche, schreibet $\frac{B}{P}$, $\frac{A}{R}$, $\frac{C}{Q}$, so ist das Product derselben $\frac{B \times A \times C}{P \times R \times Q}$, welches ebenfalls heraus kömmt, wenn man $\frac{A}{P}$, $\frac{B}{Q}$, $\frac{C}{R}$, in einander multipliciret.

Der 2. Zusatz.

§. 97. Wenn man einen Factor einer Zahl dividiret, so dividiret man zugleich die Zahl selbst. Es werde unter den Factoren A, B, C einer Zahl, der Factor A durch P dividiret, so ist $\frac{A \times B \times C}{P}$ das Product aus dem Quotienten $\frac{A}{P}$ und den übrigen Factoren, und zugleich der Quotient, welcher herauskommt, wenn die Zahl $A \times B \times C$ durch P dividiret wird.

Aufgabe.

§. 98. Zween oder mehrere Brüche, welche verschiedne Nenner haben, unter eine Benennung zu bringen, so daß der Werth der Brüche nicht geändert werde.

Auflösung.

1. Wenn die zween folgenden Brüche gegeben sind $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{5}$, so multiplicire man beide Glieder des ersten Bruchs durch den Nenner des zweyten, wodurch man das Product $\frac{2 \times 5}{3 \times 5}$ erhält; hierauf multiplicire man beide Glieder des letzten Bruchs durch den Nenner des ersten, so bekömmt man $\frac{4 \times 3}{5 \times 3}$. Die auf diese Art hervorgebrachten Brüche $\frac{10}{15}$ und $\frac{12}{15}$, sind diejenigen, welche wir suchten.

2. Sind aber die drey folgenden Brüche, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{6}{7}$ gegeben, so multiplicire man beide Glieder des ersten Bruchs durch den Nenner des zweyten 5, und durch den Nenner des dritten 7, oder durch das Factum aus diesen beiden, so erhält man $\frac{2 \times 5 \times 7}{3 \times 5 \times 7}$. Eben so multiplicire man die Glieder des zweyten Bruchs, durch die Nenner des ersten und dritten, und die Glieder des dritten Bruchs durch die Nenner des ersten und zweyten, damit man aus dem zweyten, $\frac{4 \times 3 \times 7}{5 \times 3 \times 7}$, und aus dem dritten $\frac{6 \times 3 \times 5}{7 \times 3 \times 5}$ hervor-

hervorbringe. Die Brüche $\frac{70}{105}$, $\frac{84}{105}$, $\frac{90}{105}$, werden die gesuchten seyn.

3. Auf eben diese Art verfahre man, wenn mehr als drey Brüche gegeben sind, indem man beständig die Glieder eines jeden Bruchs durch die Nenner aller übrigen, oder durch das Factum aus diesen Nennern multipliciret.

Beweis.

Denn es wird durch diese wiederholte Multiplication der Werth der Brüche nicht geändert, indem der Zehler und der Nenner durch einerley Zahlen multipliciret werden (§. 92.). Die Nenner aber der neuen Brüche werden einerley, weil sie das Product aus allen Nennern der gegebenen Brüche sind (§. 94.).

Aufgabe.

§. 99. Brüche von einerley Einheit, welche aber verschiedne Nenner haben, so viele derselben seyn mögen, durch die Addition oder Subtraction zu vereinigen.

Auflösung.

Es sollen die gegebenen Brüche $\frac{2}{3} - \frac{4}{5} + \frac{7}{9}$ dergestalt vereiniget werden, wie es die Zeichen derselben anzeigen. Man bringe sie alle unter einerley Benennung, und vereinige hierauf die herausgebrachten

brachten Brüche $\frac{90}{135} - \frac{108}{135} + \frac{105}{135}$ indem man ihre Zehler vereiniget, und den gemeinschaftlichen Nenner darunter setzt (§. 36.), folgendergestalt $\frac{90 - 108 + 105}{135}$, so erhält man $\frac{87}{135}$.

Beweis.

Denn es sind die dergestalt nach den gegebenen Gesetzen vereinigten Brüche, denjenigen gleich welche man vereinigen solte (§. 98.).

Anmerckung.

§. 100. Auf diese Weise wenden wir alle bis hieher abgehandelten einfachen Rechnungsarten, auf die Brüche beinahe mit eben so weniger Mühe, als auf die ganzen Zahlen, an. Uebrigens kan ein jeder Bruch auf unendlich viele Arten ausgedrückt werden, (§. 92.); und die Glieder solcher ordentlichen Brüche die einander gleich sind, werden bald kleiner, bald grösser, und einige derselben sind die allerkleinsten.

§. 101. Ueberhaupt aber, es mögen nun die einander gleichen Brüche $\frac{n}{d}$ und $\frac{N}{D}$ ordentliche oder unordentliche Brüche seyn, so kömmt, wenn N durch n dividiret, den Quotienten Q giebt, eben dieser Quotient heraus, wenn man D durch d dividiret. Denn wenn wir annehmen, daß D durch d dividiret den Quotienten P gebe, so ist, weil $N = n.Q$,

und

und $D = d.P$ (§. 54.), der Bruch $\frac{N}{D}$ mit dem Bruch $\frac{n \times Q}{d \times P}$ einerley. Dieser aber kan dem Bruch $\frac{n}{d}$ nicht gleich seyn, wenn nicht Q so groß ist als P. Denn es ist $\frac{n \times Q}{d \times Q} = \frac{n}{d}$, hingegen ist $\frac{n \times Q}{d \times P}$ grösser oder kleiner als $\frac{n \times Q}{d \times Q}$, nachdem P grösser oder kleiner ist als Q.

§. 102. Hieraus folgt, daß überhaupt ein jeder Bruch aus einem andern, welchem er gleich ist, hervorgebracht werde, wenn man die Glieder des andern durch einerley Zahl multipliciret, es mag nun dieses eine gantze Zahl, oder ein Bruch, oder aus beiden zusammengesetzt seyn. Wenn nehmlich $\frac{n}{d} = \frac{N}{D}$, so ist $N = n \times Q$ und $D = d \times Q$, indem der Buchstabe Q an beiden Stellen, eine gantze Zahl, oder einen ächten oder unächten Bruch bedeutet.

Lehrsatz.

§. 103. Wenn die Glieder eines ordentlichen Bruchs $\frac{n}{d}$ die kleinsten unter allen sind,

welche

welche dieser Bruch, oder die demselben gleichen Brüche haben können, folglich auch kleiner als $\frac{n \times Q}{d \times Q}$, einer von diesen gleichen Brüchen, welcher ebenfalls ein ordentlicher Bruch seyn soll, so wird Q eine gantze Zahl seyn.

Beweis.

Denn, wenn Q keine gantze Zahl ist, so sey sie zuerst ein ächter Bruch. In diesem Fall wird $n \times Q$ kleiner seyn als n und $d \times Q$ kleiner als d, und es sind folglich die Glieder des Bruchs $\frac{n \times Q}{d \times Q}$ kleiner als die Glieder des Bruchs $\frac{n}{d}$, welches nach dem was wir vorausgesetzt haben, nicht seyn kan.

Wenn aber zweytens Q aus der gantzen Zahl I, und dem ächten Bruch F zusammengesetzt wäre, so würde $n \times Q = n.I + n.F$, und $d \times Q = d.I + d.F$ (§. 57.) und diese Zahlen würden gantze seyn, weil $n \times Q$, $d \times Q$ gantze Zahlen sind. Allein es sind auch $n.I$, $d.I$, gantze Zahlen, weil sie durch die Multiplication von gantzen Zahlen hervorgebracht worden sind, also würden auch $n.F$, $d.F$ gantze Zahlen, und weil F ein Bruch ist, kleiner seyn, als die Zahlen n und d. Folglich würden die Glieder des Bruchs

n. F

$\frac{n.F}{d.F}$ noch kleiner seyn als die Glieder des Bruchs $\frac{n}{d}$, welche doch als die kleinsten angegeben werden: dieses wäre ein Wiederspruch.

Zusatz.

§. 104. Wenn also die Glieder eines Bruchs kleiner gemacht werden können, so wird dieses allzeit geschehen, indem man den Zehler durch eine gantze Zahl dividiret, durch welche sich der Nenner gleichfalls dividiren läßt. Je grösser diese Zahl ist; desto kleiner werden die Glieder des neuen Bruchs seyn. Und wenn man sich des größten Divisors, durch welchen der Zehler und Nenner zugleich dividiret werden, bedienet, so bringt man die kleinsten Glieder hervor, durch welche eben derselbe Bruch ausgedrückt werden kan.

Anmerckung.

§. 105. So werden die Glieder des Bruchs $\frac{8}{12}$ verkleinert, wenn man den Zehler und Nenner desselben durch 2 dividiret, wodurch er zu $\frac{4}{6}$ wird; will man aber die allerkleinsten Glieder haben, so dividire man sie durch 4, welches die größte von den Zahlen ist, die beide Glieder zugleich dividiren. Man findet aber diesen größten Divisor meistentheils durch leichte Proben. Oder wenn man einen Divisor gefunden hat, welcher noch nicht der größte ist, so kan

kan man, nachdem die Glieder des gegebenen Bruchs durch denselben verkleinert worden sind, die Glieder des neuen Bruchs noch weiter, auf folgende Art verkleinern. Wenn man beide Glieder des Bruchs $\frac{24}{36}$ durch 4 dividiret, so wird daraus $\frac{6}{9}$, dessen Glieder man noch durch 3 dividiren kan, wodurch der Bruch auf die allerkleinsten Glieder $\frac{2}{3}$ gebracht wird. Zuweilen aber sind diese dividirende Zahlen so versteckt, daß einige Kunst erfordert wird, sie ausfündig zu machen.

Lehrsatz.

§. 106. Wenn die Buchstaben deren wir uns hier bedienen werden, gantze Zahlen ausdrücken, so wird im Fall $A = C + Q \times B$ oder $A = C - Q \times B$, diejenige gantze Zahl, welche sowohl C als B dividiret, auch die Zahl A dividiren.

Beweis.

Es sey n die Zahl welche sowol C als B dividiret: und es habe C durch n dividiret den Quotienten p, hingegen B durch eben dieses n dividiret den Quotienten q gegeben, so ist $C = p.n$ und $B = q.n$, folglich $A = p.n + Q\, q.n$ oder $A = p.n - Q\, q.n$. Es ist aber offenbar, daß sowol diese Summe, als diese Differentz sich durch n dividiren läßt, und daß bey der ersten der

Quotient $p+Q.q$, bey der letzten $p-Q.q$, beides gantze Zahlen, herauskommen (§. 58.).

Der 1. Zusatz.

§. 107. Es sey A der Dividendus, B der Divisor, Q der erste Theil des Quotienten, und C der Rest. So ist $A=C+Q\times B$ (§. 55.), folglich wird die Zahl die den Divisor B und den Rest C dividiret, auch den Dividendus A dividiren. Ist hingegen C der Dividendus und A der Rest, so ist, wenn sonst nichts geändert wird, $A=C-Q\times B$, und es wird also die Zahl, welche sowol den Divisor als den Dividendus genau dividiret, auch den Rest genau dividiren.

Der 2. Zusatz.

§. 108. Eine jede Zahl also, welche zwar den Divisor, aber nicht den Rest dividiret, dividiret den Dividendus nicht, und eine jede der Zahlen welche den Divisor dividiren, dividiret den Rest nicht, wenn sie nicht zugleich den Dividendus dividiret.

Der 3. Zusatz.

§. 109. Also wird die größte der Zahlen, welche den Divisor und den Rest zugleich dividiren, auch die größte der Zahlen seyn, durch welche der Divisor und Dividendus dividiret wird. Denn wenn noch eine grössere Zahl den Dividendus und den

Divisor zugleich dividiren könte, so würde eben diese Zahl auch den Rest dividiren.

Aufgabe.

§. 110. Den größten gemeinschaftlichen Divisor zwoer gegebenen Zahlen 2145, und 182 zu finden.

Auflösung.

Man dividire die grössere Zahl durch die kleinere, und bemerke den Rest. Durch diesen Rest dividire man den eben gebrauchten Divisor, und auf diese Art fahre man, indem man beständig den letzten Divisor durch den Rest dividiret, so lange fort, bis kein Rest mehr bleibt; nach folgender Vorschrift:

Dividendus		Divisor		Rest
2145	. . .	182	. . .	143
182	. . .	143	. . .	39
143	. . .	39	. . .	26
39	. . .	26	. . .	13
26	. . .	13	. . .	0

so wird der letzte Divisor 13, welches auch der Rest der vorletzten Division war, der größte gemeinschaftliche Divisor der gegebenen Zahlen 2145 und 182 seyn.

Beweis.

Beweis.

Denn es ist diese Zahl 13 der größte gemeinschaftliche Divisor der Zahlen 26 und 13 in der letzten Queer-Reihe oder Zeile, also auch der letzten und mittleren Zahl in der vorletzten Zeile, welche mit diesen einerley sind, folglich auch der ersten und mittleren Zahl in eben der Zeile (§. 109.): und man kan diese Schlüsse fortsetzen, bis man auf die erste und mittlere Zahl der ersten Zeile kommt, welches die gegebenen Zahlen 2145 und 182 selbst sind.

Anmerckung.

§. 111. Es wird durch dieses Verfahren in der That allzeit der größte gemeinschaftliche Divisor des Nenners und Zehlers von einem Bruch gefunden, allein dieser gefundene Divisor ist öfters die Einheit; welches anzeigt, daß ein dergleichen Bruch sich nicht auf eine kleinere Benennung bringen, oder durch einen kleineren Zehler und Nenner ausdrücken lasse, weil die Einheit eigentlich nicht dividiret.

Erklärung.

§. 112. Wenn von zwo oder mehreren Zahlen, der größte gemeinschaftliche Divisor die Einheit ist, das heißt, wenn sie eigentlich gar keinen gemeinschaftlichen Divisor, oder keinen gemeinschaftlichen

Factor haben, so nennt man eine in Ansehung der andern, Einfache Zahlen (Numeri Primi inter se); dergleichen sind 5 und 9; 10 und 21, 8 und 15 und 19.

Anmerckung.

§. 113. Die kleinsten derjenigen Zahlen, durch welche ein gegebener Bruch ausgedrückt werden kan, haben keinen gemeinschaftlichen Factor mehr, und sind gegen einander betrachtet, einfache Zahlen. Und wenn die zwey Glieder eines Bruchs einfache Zahlen gegen einander sind, so sind sie die kleinsten, durch welche sich der Bruch ausdrücken läßt.

Erklärung.

§. 114. Eine Zahl, welche in Ansehung einer jeden andern, ausser denen die sie selbst dividiret, einfach ist, wird überhaupt eine einfache Zahl genennet. (Numerus absolute Primus vel simplex).

Anmerckung.

§. 115. Eine einfache Zahl hat keinen andern Divisor als sich selbst. Denn wenn die einfache Zahl P durch eine andre Zahl d dividiret werden könte, so würde, da d auch sich selbst dividiret, dieses d der gemeinschaftliche Divisor von d und P, und

und P in Ansehung d keine einfache Zahl, folglich überhaupt keine einfache Zahl seyn.

Erklärung.

§. 116. Eine Zahl, welche keine einfache Zahl ist, das heißt, welche ausser sich selbst noch einen Divisor hat, wird eine zusammengesetzte Zahl (Numerus compositus) genennt.

Anmerckung.

§. 117. Es entstehen also zusammengesetzte Zahlen, durch die Multiplication andrer Zahlen, und es sind, weil hier bloß von gantzen Zahlen die Rede ist, diese Factoren kleiner als die Zahlen, welche aus denselben zusammengesetzt werden; selbst aber, sind sie entweder einfache Zahlen, oder gleichfalls zusammengesetzt. Sind die Factoren zusammengetzt, so können sie wieder in andre Factoren aufgelöset werden, von welchen man eben diese Frage aufwerfen kan; und es müssen auf diese Art, da gantze Factoren nicht ins unendliche verkleinert werden können, zuletzt einfache Zahlen hervor kommen. Hieraus folgt, daß eine jegliche zusammengesetzte Zahl, durch die Multiplication zwoer oder mehrerer einfacher Zahlen hervorgebracht werden könne, und dieses nennen wir hier zusammensetzen.

Lehrsatz.

§. 118. **Eine jede zusammengesetzte Zahl, wird aus gewissen bestimmten einfachen Zahlen zusammengesetzt, welche nicht verändert werden können.**

Beweis.

Man setze daß eine zusammengesetzte Zahl N durch eine einfache Zahl p dividiret, die gantze Zahl P zum Quotienten gebe, wenn hingegen eben diese N durch eine andre einfache Zahl q dividiret wird, der gleichfalls gantze Quotient Q hervorgebracht werde: so wird seyn $N = p.P = q.Q$. Wenn man also unter jedes von diesen gleichen Producten einerley Nenner $q.P$ setzet, so ist $\frac{p.P}{q.P} = \frac{q.Q}{q.P}$, und wenn man die Brüche abkürtzet $\frac{p}{q} = \frac{Q}{P}$. Es sind aber p, q einfache Zahlen, folglich auch die kleinsten durch welche der Bruch ausgedrückt werden kan (§. 113.), und es ist also Q das Factum aus p und einer andern gantzen Zahl I, und P das Factum aus q und eben dieser gantzen Zahl I, (§. 103.); oder, $Q = p\,I$ und $P = q.I$: welches mit dem zuerst gefundenen $N = p.P = q.Q$ zusammengehalten, $p.P = p.q.I$ und $q.Q = q.p.I$ giebt; weil aber $N = p.P$ und auch $N = q.Q$ so ist die Zahl N aus zwoen einfachen Zahlen p, q und einer dritten Zahl I zusammengesetzt. Wenn nun diese I gleichfalls eine einfache Zahl ist, so ist der Satz offenbar: wäre aber I zusammengesetzt, so kan man davon eben dasjenige beweisen, was von der

der Zahl N erwiesen worden ist, und man kan diese Schlüsse so lange fortsetzen biß zuletzt I eine einfache Zahl wird.

Der 1. Zusatz.

§. 119. Eine zusammengesetzte Zahl wird durch keine andre Zahlen dividiret als durch die einfachen Zahlen aus denen sie zusammengesetzt ist, und durch die Producte aus einigen von diesen einfachen Zahlen. So kan die Zahl 30, welche aus den einfachen Zahlen 2, 3, 5 zusammengesetzt ist, ausser diesen einfachen Zahlen noch allein durch die zusammengesetzten Zahlen $6=2\times 3$, $10=2\times 5$, $15=3\times 5$, und $30=2\times 3\times 5$ dividiret werden.

Der 2. Zusatz.

§. 120. Wenn die zusammengesetzten Glieder eines gegebenen Bruchs $\frac{15}{12}$ in einfache Glieder folgendergestalt aufgelöset werden $\frac{3\times 5}{2\times 2\times 3}$, so werden die Glieder des Bruchs verkleinert, wenn man die einfachen Zahlen, die sich in beyden Gliedern zugleich befinden, auslöschet, wodurch der gegebene Bruch in $\frac{5}{2\times 2}=\frac{5}{4}$ verwandelt wird. Wenn daher alle einfache Zahlen welche in dem Nenner sind, sich auch in dem Zehler finden, so ist der Bruch einer gantzen Zahl gleich. Sind aber in dem Zehler gar keine von denen einfachen Zahlen, welche man in dem Nenner findet, so kan der Bruch nicht durch kleinere Glieder, und noch viel weniger durch eine gantze Zahl ausgedrückt werden.

Der 3. Zusatz.

§. 121. Wenn uns zwo beliebige gantze Zahlen, zum Beyspiel die zusammengesetzten 2. 3. 3. 5 und 3. 5. 7 gegeben sind, deren gemeinschaftlicher Divisor 3. 5 ist; so wird, wenn man eine von diesen Zahlen durch irgend eine einfache Zahl multipliciret, oder dividiret, welche kein Factor der andern ist, der gemeinschaftliche Divisor nicht geändert. Es haben also die Zahlen 2. 3. 3. 5. 11 und 3. 5. 7, oder 2. 3. 3. 5 und 3. 5. 7. 7 noch eben den größten gemeinschaftlichen Divisor 3. 5 oder 15, welchen die Anfangs gegebenen Zahlen hatten.

Anmerckung.

§. 122. Wenn man also die Glieder eines Bruchs verkleinern will, so wird diese Arbeit erleichtert, wenn man ein jegliches derselben durch eine einfache Zahl dividiret, durch welche sich das andre Glied nicht dividiren läßt. Denn die Glieder des auf diese Art hervorgebrachten Bruchs, haben eben den größten gemeinschaftlichen Divisor, welchen die Glieder des zuerst gegebenen Bruchs hatten. Es seyn die Glieder des Bruchs $\frac{30}{147}$ zu verkleinern, so dividire

dividire man den Zehler durch 2, wodurch sich der Nenner nicht dividiren läßt, und den Nenner durch 7, welches den Zehler nicht dividiret. Dadurch wird der Bruch $\frac{15}{21}$ erhalten, dessen Glieder sich beide durch 3 dividiren lassen, welches ebenfalls der größte gemeinschaftliche Divisor der Glieder des anfangs gegebenen Bruchs $\frac{30}{147}$ ist, wodurch derselbe in $\frac{10}{49}$ verwandelt wird.

§. 123. Wenn man diese Arbeit fortsetzet, und beständig ein Glied des Bruchs durch eine einfache Zahl dividiret, durch welche sich das andre Glied nicht dividiren läßt, so wird man zuletzt sowohl in dem Zehler als in dem Nenner auf den größten gemeinschaftlichen Divisor selbst kommen. So wenn der Zehler des eben hervorgebrachten Bruchs $\frac{15}{21}$ durch 5 und der Nenner durch 7 dividiret wird, komt $\frac{3}{3}$ heraus; es ist aber 3 wie wir gesehen haben, der größte gemeinschaftliche Divisor des zuerst gegebenen Bruchs.

Dritter Abschnitt
Von den Quadrat-Zahlen.

Erklärung.

§. 124.

Wenn eine Zahl durch sich selbst multipliciret wird, so nennt man das Product das Quadrat derselben Zahl; die Zahl aber heißt die Quadrat-Wurtzel (Radix quadratica) von ihrem Quadrat. Das Quadrat der Zahl 25 ist 625, denn dieses Product wird herausgebracht, wenn man 25 durch 25 multipliciret. Hingegen ist die Quadrat-Wurtzel von 625, die Zahl 25.

Erklärung.

§. 125. Wenn man das Quadrat durch seine Wurtzel multiplicirer, so wird das Product der Cubus oder Würfel derjenigen Zahl genennt, aus welcher zuerst das Quadrat, und hernach dieses Product, durch eine wiederholte Multiplication hervorgebracht worden ist; die Zahl aber heißt auch in Ansehung ihres Cubus die Cubic-Wurtzel (Radix cubica). Der Cubus der Zahl 25 ist 15625, und es entstehet derselbe wenn man das

das Quadrat 625 durch seine Wurtzel 25 multipliciret. Eben diese Wurtzel 25 aber ist auch die Cubic-Wurtzel von dem Cubus 15625.

Erklärung.

§. 126. Ueberhaupt heissen die Producte aus lauter gleichen Factoren, so viele derselben auch seyn mögen, Dignitäten oder Potenzen von einem dieser gleichen Factoren. Die zweyte Potenz enthält diesen Factor zweymahl, die dritte dreymahl, die vierte viermahl, und so ferner. So ist die zweyte Potentz von der Zahl 3, diese: 3×3 oder 9, die dritte Potentz eben dieser Zahl ist $3 \times 3 \times 3$ oder 27, die vierte $3 \times 3 \times 3 \times 3$ oder 81 u. s. f. Die Zahl 3 aber selbst wird auch in Ansehung ihrer zweyten Potenz, die zweyte Wurtzel (Radix secunda), in Ansehung der dritten Potenz, die dritte Wurtzel (Radix tertia) u. s. f. genennet.

Anmerckung.

§. 127. Es ist sehr leicht, von einer gegebenen Wurtzel, das Quadrat, den Cubus, oder die zweyte, dritte, vierte, ja auch eine jede höhere Potenz zu schaffen. Allein, von der Potenz auf ihre Wurtzel zurückzugehen, ist weit schwerer. Inzwischen wird ein allgemeiner Weg hiezu zu gelangen in dem folgenden gezeigt werden (§ 231. u. folg). Jetzt wollen wir nur weisen, wie die Quadratwurtzel einer jeden

Zahl sehr genau zu finden ist, weil diese Aufgabe sehr häufig vorkommt; und nach ihrer eignen Art, ohne allzugrosse Schwierigkeit aufgelöset wird.

§. 128. Es ist aber aus demjenigen, was wir von der Multiplication wissen, offenbar, daß, wenn das Quadrat von 5, die Zahl 25 ist, das Quadrat eben dieser Zahl mit einer angehängten Null, 50, die nehmlichen Zifern 25, nebst zwoen Nullen enthalten, folglich 2500 seyn werde, so daß sich überhaupt in einem jeglichen Quadrat doppelt so viele Nullen als in der Wurtzel befinden.

§. 129. Ist hingegen die Wurtzel 0, 5, so ist das Quadrat 0, 25, von der Wurtzel 0, 05 ist das Quadrat 0, 0025, und so weiter; indem nehmlich in dem Quadrat zweymahl so viele Zifern zur Rechten des Zeichens der einzelnen Einheiten stehen, als dergleichen in der Wurtzel auf dieser Seite standen.

§. 130. In dem Quadrat eines Bruchs ist der Zehler das Quadrat des Zehlers der Wurtzel, und der Nenner das Quadrat ihres Nenners. Das Quadrat des Bruchs $\frac{2}{3}$ ist $\frac{4}{9}$, und das Quadrat des Bruchs $\frac{5}{2}$ ist $\frac{25}{4}$.

§. 131. Dergleichen Schlüsse werden sich auf den Cubus, und auf eine jegliche höhere Potenz leicht anwenden lassen, wenn man auf diesem Wege weiter fortgehet.

Lehrsatz.

Lehrsatz.

§. 132. Wenn eine Zahl aus zweyen Theilen bestehet, so ist das Quadrat der Zahl, aus dem Quadrat der beiden Theile, und dem Product aus diesen beiden Theilen zweymahl genommen, zusammengesetzt.

Beweis.

Wenn die durch ihre Einheiten ausgedrückte Zahl AB, nach Belieben in zwey Theile AC, CB getheilet, und hierauf das Quadrat von AB gemacht wird; so ist offenbar, daß dasselbe, aus CE, dem Quadrat des Theils AC, aus GF dem Quadrat des Theils CB, und endlich aus EF, CG, dem Product aus den Theilen zweymahl genommen, zusammengesetzt sey. Fig. 3.

Eben dieses wird auch klar, wenn man setzt N=A+B. Denn es müssen, um NN hervorzubringen, beide Theile A, B, sowohl durch A, als auch durch B multipliciret werden (§. 57.), wodurch entstehet AA+AB+BA+BB, oder AA+2AB+BB. Es enthält also das Quadrat NN die Quadrate der Theile, AA, BB und das Product AB zweymahl.

Der

Der 1. Zusatz.

§. 133. Man nehme eine Zahl wie 34, welche durch zwo Zifern ausgedrückt ist, deren eine zehnmahl so grosse Einheiten zehlet, als die andre andeutet, von welcher Ordnung diese Einheiten übrigens seyn mögen: so wird das Quadrat einer solchen Zahl folgendergestalt zusammengesetzt:

$$\begin{array}{rcl} 30 \times 30 & = & \ldots 9\,.\,. \\ 60 \times 4 & = & \ldots 24\,. \\ 4 \times 4 & = & \ldots 16 \\ \hline \end{array}$$

und ist also das Quadrat . . 1156; dessen letzte Zifer 6, Einheiten von eben der Ordnung ausdrückt, als die letzte Zifer der Wurtzel 4. Bedeutet also 4 einzelne Einheiten, so ist weiter nichts zu thun übrig. Wenn hingegen durch 4 Zehner ausgedrückt werden, so muß man dem Quadrat zwo Nullen anfügen, damit es 115600 werde, und so in den übrigen Fällen, nach Anleitung desjenigen, was §. 128. gelehret worden ist.

Der 2. Zusatz.

§. 134. Auf eben diese Art wird man das Quadrat einer Zahl, welche Einheiten, und Zehner von diesen Einheiten enthält, zusammensetzen, wenn gleich die Anzahl der Zehner grösser seyn solte, als daß man sie durch eine einzige Zifer ausdrücken könnte,

könnte, wie zum Beyspiel in der Zahl 364, welche man in zwey Theile 360+4 theilen kan, die Anzahl der Zifern, welche Zehner bedeuten, mag noch so groß seyn. Weis man aber dieses, so kan man auch das Quadrat einer jeden, durch noch so viele Zifern ausgedrückten Zahl, nach eben den Gesetzen, auf folgende Art schaffen. Es sey die gegebene Zahl 75342. Man fange von den Zifern der höchsten Ordnungen an, um nachher zu den niedrigern fortzugehen, und mache zuerst das Quadrat der Zahl 75 wie gewöhnlich, aus dem Quadrat von 70, dem Product 70×5 zweymahl genommen, und dem Quadrat von 5. Werden nun dieser Quadrat-Zahl, welche 5625 seyn wird, zwo Nullen angehängt, so entstehet das Quadrat der Zahl 750. Wenn man also nunmehr die Zahl von dreyen Zifern 753 vornimmt, und dieselbe dergestalt theilet 750+3, so wird das Quadrat hievon auf eben die Art zusammengesetzt, wenn man zu dem eben gefundenen Quadrat von 750 das Product der Theile 750×3 zweymahl, und noch das Quadrat von 3 addiret. Aus dem auf diese Art erhaltenen Quadrat der Zahl 753 entstehet das Quadrat von 7530, wenn man demselben abermahls zwey Nullen anfüget, und hieraus weiter das Quadrat der Zahl 7534, oder 7530+4, wenn

man

man zu dem vorigen noch das Product 7530×4 zweymahl, und ausserdem das Quadrat der Zifer 4 addiret. Aus diesem neuen Quadrat der Zahl 7534 kan nunmehr das Quadrat von 75340, und hieraus weiter das Quadrat der Zahl 75342 oder $75340 + 2$ auf eben die Art zusammengesetzt werden. Die gantze Rechnung wird man sich, wenn man alle Additionen bis ans Ende versparet, durch folgende Tafel deutlich vorstellen:

49				
7	0.			
	25	.		
	45	0.		
		.9		
	6	02	4.	
			16	.
		30	13	6.
				4
56	76	41	69	64

Der 3. Zusatz.

§. 135. Man sieht hieraus überhaupt, daß, so groß auch die Anzahl der Zifern in einer Wurtzel ist, das Quadrat derselben die Quadrate aller einzelnen Zifern, und überdem die Producte, welche entstehen, wenn man eine jede Zifer durch alle übrigen, welche zur lincken Hand vor ihr geschrieben

ben sind, multipliciret, zweymahlgenommen, enthalten werde; doch muß man hiebey auf die Ordnungen der Einheiten, welche eine jede Zifer ausdrückt, gehörig Achtung geben Diejenigen Plätze aber, wo sich die Quadrate der Zifern endigen, sind von der Stelle der einzelnen Einheiten beständig um 1, 3, 5, 7, ꝛc. Plätze entfernt, die Producte hingegen um 2, 4, 6, 8 ꝛc. Plätze; so daß nehmlich bey jenen die ungraden, bey diesen die graden Zahlen gelten; und in dieser Ordnung werden auch diese Quadrate und diese Producte in die Summe eingetragen.

Aufgabe.

§. 136. Die Quadrat-Wurtzel einer gegebenen Quadrat-Zahl zu finden.

Auflösung.

Es sey die Wurtzel der eben zusammengesetzten Quadrat-Zahl 5676416964 zu suchen. Man theile die gegebene Zahl in Classen von zwoen Zifern, indem man von der rechten Seite anfängt, und nach der lincken fortgehet, so daß, wenn die Zahl der Zifern ungrade ist, diejenige Classe, welche nur eine Zifer hat, die erste zur Lincken werde: hierauf gehe man nach Vorschrift der folgenden Tafel von der lincken zur rechten fort:

	56	76	41	69	64	75342	. . R.
	49	..	..	..	..	A	
14)	7	76					
	7	0.	..	..	..	B	
		25	..	..	..	C	
150)		51	41				
		45	0.	..	..	D	
			9	..	..	E	
1506)		6	32	69			
		6	02	4.	.	F	
				16	..	G	
15068)			30	13	64		
			30	13	6.	H	
					4	I	
			0.0	00	00		

1. Man nehme das Quadrat 49, das gröſzte, welches von den Zifern der ersten Classe abgezogen werden kan; die Wurtzel dieses Quadrats 7 schreibe man als die erste Zifer der verlangten Wurtzel bey R; das Quadrat hingegen 49 schreibe man in die Zeile A, und subtrahire dasselbe von den Zifern der ersten Classe, indem man den Rest 7 bemercket.

2. Zu diesem Rest setze man die erste Zifer der nächsten Classe, wodurch man 77 erhält, welches durch die gefundene Zifer 7 zweymahl genommen

nommen oder durch 14 dividiret, den Quotienten 5 giebt; dieses ist die zwote Zifer der gesuchten Wurtzel.

3. Man schreibe nunmehr das Product aus dem Quotienten 5 und dem Divisor 14, hiernächst das Quadrat des Quotienten, so wie in der Tafel bey B und C geschehen ist, man subtrahire diese beiden Zahlen, und mercke den Rest an.

4. Zu diesem Rest 51 setze man abermals die nächste Zifer des Quadrats 4, so daß man 514 habe, und dividire dieses durch 150, oder durch den bishieher gefundenen Theil der gesuchten Wurtzel 75 zweymahl genommen, so ist der Quotient 3, die dritte Zifer der Wurtzel.

5. Wenn man aus diesem Quotienten und dem Divisor 150 das Product D macht, und dieses nebst dem Quadrat des Quotienten E wieder subtrahiret, so wird die übergebliebene Zahl 632, wenn man mit derselben, eben wie mit den vorigen verfährt, die folgende Zifer der Wurtzel geben; und ist diese gefunden, so findet man die übrigen alle nach den nehmlichen Gesetzen, indem man beständig durch den bereits gefundenen Theil der Wurtzel zweymahl genommen dividiret,

da denn der Divisor, wie leicht zu sehen ist, immer grösser und grösser wird.

Beweis.

Ich sage, die dergestalt gefundene Zahl 75342 ist die Quadrat-Wurtzel der gegebenen Quadrat-Zahl. Denn es besteht das Quadrat dieser Zahl 75342 aus denen Theilen, welche in der Tafel in den Zeilen A, B, C, D, E, F, G, H, I geschrieben sind (§. 134.). Alle diese Theile zusammengenommen aber, machen auch die gegebene Quadrat-Zahl 5676416964 aus.

Lehrsatz.

§. 137. **Wenn die Quadrat-Wurtzel einer gantzen Zahl sich nicht unter den gantzen Zahlen findet, so findet sich dieselbe auch nicht unter den Brüchen.**

Beweis.

Wenn man annimmt, daß der Bruch $\frac{a.b.c}{\alpha.\beta}$, (in welchem a. b. c. die einfachen Zahlen bedeuten, durch deren Multiplication der Zehler, und α, β, die einfachen Zahlen, durch deren Multiplication der Nenner zusammengesetzt wird) die Quadrat-Wurtzel einer gantzen Zahl sey: so ist

ist das Quadrat derselben $\frac{a.b.c.a.b.c}{\alpha.\beta.\alpha.\beta}$, eine gantze Zahl, welches nicht seyn kan, wenn nicht alle die einfachen Zahlen, durch deren Multiplication der Nenner $\alpha.\beta.\alpha.\beta$ zusammengesetzt wird, auch als einfache Factoren in dem Zehler a. b. c. a. b. c anzutreffen sind (§. 120.). Hieraus aber würde folgen, daß auch in dem Bruch $\frac{a.b.c}{\alpha.\beta}$ die einfachen Factoren $\alpha.\beta$, in dem Nenner und Zehler zugleich stehen, weil man in das Quadrat keine andre Factoren gebracht hat, als in der Wurtzel waren; und alsdenn wäre auch diese Wurtzel eine gantze Zahl, welches demjenigen zuwider ist, was man voraus gesetzt hat.

Anmerckung.

§. 138. Es giebt also unendlich viele Zahlen, deren Wurtzeln, da sie weder gantze Zahlen noch Brüche sind, nicht gefunden werden; oder die durch die Multiplication einer Zahl von einer bestimmten Grösse durch sich selbst, nicht hervorgebracht werden können. Wenn man aber gleich keine Zahl geben kan, welche durch sich selbst multipliciret, eine andre Zahl, zum Beyspiel 3, genau herausbringt, so ist es doch in unsrer Gewalt, eine

Zahl zu schaffen, welche dieses mit einem sehr kleinen Fehler leiste; und wenn diese gegeben ist, eine andre zu finden, welche, in sich selbst multipliciret die Zahl 3 mit einem viel kleineren Fehler herausbringe; nach dieser, eine dritte, welche der Warheit noch näher komme, und so diesen Fehler ohne Ende zu vermindern.

Aufgabe.

§. 139. Es ist eine gantze, oder nach Art der gantzen Zahlen, durch zehntheilige Brüche ausgedrückte Zahl gegeben, und man soll eine andre Zahl finden, deren Abweichung von der Quadrat-Wurtzel der ersten so klein sey, als es verlangt wird.

Auflösung.

Man bemercke in der gegebenen Zahl die Stelle der einzelnen Einheiten. Von dieser Stelle an, theile man die Zahl zur Rechten und Lincken in Classen von zwoen Zifern, so daß man diejenige Classe, welche die Einheiten von der niedrigsten Ordnung enthält, mit einer Null füllet, wenn die Anzahl der Zifern vor die Zehntheilige Brüche ungrade ist. Am Ende füge man nunmehr so viele Classen von zwoen Nullen hinzu, als man zu dem vorgesetzten Zweck vor hinreichend

reichend erachtet, indem man sich erinnert, daß jegliche Classe von zwoen Zifern im Quadrat, eine Zifer der Wurtzel giebt (§. 129.). Das übrige wird auf eben die Art verrichtet, als ob die gegebene Zahl ein würckliches Quadrat wäre, ausser daß man die Zahlen, welche übrig bleiben, nachdem man alle Classen durchgegangen ist, nicht in Betrachtung ziehet.

Wenn also die Quadrat-Wurtzel der Zahl 4, 67 verlangt wird, theilet man diese Zahl, nachdem man Nullen angefüget hat, folgendermassen in Classen ein:

4, | 67 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 | 00 |

die hieraus gezogene Quadrat-Wurtzel ist beinahe 2, 1610182, welche Zahl in sich selbst multipliciret, zwar nicht genau 4, 67, aber doch eine andre Zahl 4, 66999966073124 hervorbringt, welche kaum kleiner ist, als jene.

Beweis.

Alle Zahlen, welche während der Ausziehung der Wurtzel von der gegebenen Zahl abgezogen worden sind, machen zusammengenommen, das Quadrat der gefundenen Wurtzel aus, welches kleiner ist, als die gegebene Zahl 4, 67. Allein jenes Quadrat kömmt dieser Zahl desto näher, je grösser die Anzahl der Zifern ist, durch welche es ausgedrückt wird, weil nehmlich die Brüche, welche den Fehler bezeichnen, desto kleiner werden.

Anmerckung.

§. 140. Die Classen der Nullen können, so wie man die Arbeit fortsetzet, nach und nach angefüget werden, denn es würde unnütz seyn, wenn man gleich anfangs mehrere anfügen wolte, als man hernach gebrauchet. Man mag aber arbeiten so lange man will, so wird man, wenn die gegebene Zahl kein Quadrat ist, niemals ans Ende kommen; indem, wenn die Wurtzel genau geschafft werden solte, man die Arbeit ins unendliche fortsetzen müßte. Es ist also die Wurtzel einer Zahl, die kein Quadrat ist, eine Irrational-Zahl, weil man sie nicht ausdrücken kan, ohne die Einheit in unendlich kleine Theile zu theilen (§. 9.).

Vierter Abschnitt.
Von den Proportionen.

Erklärung.

§. 141.

Wenn bey vier nach Belieben angenommenen Grössen A, B, C, D, deren erste und zwote A und B aus einander gleichen Theilen, und die dritte und vierte C und D eben so aus gleichen Theilen zusammengesetzt sind: die Anzahl der Theile in der ersten Zahl A, mit der Anzahl der Theile in der dritten C, und die Anzahl der Theile in der zwoten B, mit der Anzahl der Theile in der vierten D übereinkommt; so sagt man, diese vier Grössen sind in der Ordnung, wie sie stehen, Proportional, woraus man leicht schliesset, was eine Proportion genennt werde.

Anmerckung.

§. 142. Ueberhaupt sind vier Grössen A, B, C, D proportional, wenn die erste A aus der zwoten B, eben so entsteht, wie die dritte C aus der vierten D; folglich, wenn zum Beyspiel $A = 2B$, und $C = 2D$, oder überhaupt $A = nB$ und $C = nD$, so daß n eine jegliche gantze Zahl bedeuten kan. Oder wenn $A = \frac{1}{2}B$ und $C = \frac{1}{2}D$, oder $A = \frac{2}{3}B$ und $C = \frac{2}{3}D$, oder überhaupt $A = nB$ und $C = nD$, so, daß nunmehr n auch einen jeden Bruch bedeutet. Oder auch, wenn $A = B + \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}B$ und $C = D + \frac{1}{2}D + \frac{1}{3}D$, oder überhaupt, $A = pB + qB + rB + sB$ etc. und $C = pD + qD + rD + sD$ etc. was auch p, q, r, s vor Zahlen bedeuten, und wie viele dieser Buchstaben auch seyn mögen, wenn nur einerley Buchstabe an verschiednen Stellen immer einerley Zahl andeutet.

§ 143. Es können aber dergleichen Zahlen, so viele derselben auch seyn mögen, wenn nur die Anzahl nicht unendlich groß ist, so oft es nöthig ist, unter einerley Benennung gebracht, und hernach vereinigt werden (§. 90.), und wenn hiedurch eine Zahl $\frac{n}{m}$ hervorgebracht würde, so wäre $A = \frac{n}{m}B$ und $C = \frac{n}{m}D$. Wenn zum Beyspiel $A = 2B + \frac{1}{2}B + \frac{2}{3}B - \frac{5}{6}B$ und $C = 2D + \frac{1}{2}D + \frac{2}{3}D - \frac{5}{6}D$, so ist, weil $2 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{5}{6} = \frac{12}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{5}{6} = \frac{14}{6}$ auch $A = \frac{14}{6}B$ und $C = \frac{14}{6}D$.

§. 144. Wenn aber derer Zahlen, von denen wir die ersten durch p, q, r, s angedeutet haben, eine unendliche Menge ist: also zum Beyspiel $A = B + \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}B + \frac{1}{4}B$ und so weiter ohne Ende, und $C = D + \frac{1}{2}D + \frac{1}{3}D + \frac{1}{4}D$ und so weiter gleichfalls ohne Ende: so können wir zwar alle diese Zahlen nicht

allzeit

allzeit dergestalt vereinigen, daß eine einzige daraus werde; aber es ist noch allzeit in unsrer Gewalt eine Zahl zu finden, welche allen zusammen genommen beynahe gleich sey, nach dieser eine andre, von der man dieses mit einem geringeren Fehler sagen könne, eine dritte, die noch weniger von der Warheit abweiche als die zwote, und so fort. Je mehrere von diesen Zahlen wir nehmlich vereinigen, und je grösser diese in Ansehung derer sind, welche wir weglassen, desto kleiner ist der Fehler. Wenn also auf diese Art $\frac{n}{m}$ hervorgebracht wird, so ist $A = \frac{n}{m}B$, und $C = \frac{n}{m}D$, mit einem sehr kleinen Fehler, welcher auch, wenn er noch zu groß scheinen solte, so weit vermindert werden kan, als es verlangt wird. Ist aber dieser Fehler endlich so sehr verkleinert worden, als es die Umstände der Sache erfordern, so muß man annehmen, daß auch iezt A der Grösse $\frac{n}{m}B$, und C der Grösse $\frac{n}{m}D$, vollkommen gleich sey.

§. 145. Wenn also $A = \frac{n}{m}B$ und $C = \frac{n}{m}D$, so kan man überhaupt daraus schliessen, daß die Grössen A, B, C, D proportional sind, im Fall die Buchstaben n und m ganze Zahlen andeuten: und dieses kommt mit dem was in der Erklärung ge-

 sagt

sagt worden ist, überein. Es steht uns aber frey, die gleichen Theile, aus welchen die Grössen A, B, C, D zusammengesetzt werden, grösser oder kleiner anzunehmen, und auch die Anzahl dieser Theile nach Belieben festzusetzen.

§. 146. Wenn man darthun will, daß die Grössen A, B, C, D proportional sind, so ist darzu hinlänglich, wenn man beweiset, daß wenn die Grössen B und C in einerley Anzahl von gleichen Theilen getheilet worden sind, ohnmöglich die Grösse A mehrere Theile von B enthalten kan, als Theile von D in die Grösse C gebracht werden können, die Anzahl der Theile in B und D mag seyn welche sie will. Denn gleichwie man, wenn die Grössen B und D in eine gewisse Zahl gleicher Theile getheilet worden ist, die Grösse A aber nicht aus so vielen Theilen der Grösse B zusammengesetzt werden kan, als viele Theile von D die Grösse C ausmachen, alsdenn den Schluß macht, daß die Zahlen A, B, C, D nicht proportional seyn: so ist auch, wenn gewiesen wird, daß eine dergleichen Theilung der Grössen B und D, nach welcher in die Grösse A mehrere Theile als in die Grösse C gebracht werden können, unmöglich sey, von selbst offenbar, daß sich nichts findet, woraus man schliessen könte, daß die Grössen A, B, C, D von der Proportion abweichen; und dieses heißt eben so viel, als erweisen, daß diese Grössen proportional sind.

§. 147. Man erkennet übrigens leicht, daß in einer jeden Proportion, die erste Grösse A mit der zwoten B, und die dritte C mit der vierten D von einerley Art seyn müsse (quanta homogenea). Denn es muß ein Theil der Grösse A einem Theile von B, und wiederum ein Theil von C einem Theile der Grösse *D* gleich seyn, und hierinn liegt eben die Ursache warum man sie Grössen von einerley Art nennet. Daß aber die beyden ersteren Grössen A und B, mit den beyden letzteren von einerley Art sind, ist nicht nothwendig, obgleich dieses ebenfalls seyn, ja auch die Grösse B der Grösse C gleich seyn kan.

Zusatz.

§. 148. Bey der Multiplication verhält sich der Multiplicator zu der Einheit, wie das Product zu der multiplicirten Zahl. Bey der Division hingegen verhält sich die Einheit zu dem Divisor, wie der Quotient zu der dividirten Zahl (§. 44. 45.).

Erklärung.

§. 149. Wenn die Grössen A, B, C, D proportional sind, und es ist B=C, so wird die Proportion stetig oder zusammenhängend genennt (Proportio continua); die übrigen sind nicht zusammenhängend (discretæ).

Erklä-

Erklärung.

§. 150. Die Art selbst aber wie die Grösse A aus B oder die Grösse C aus D entsteht, heißt die Verhältniß (Ratio) von A zu B, oder von C zu D.

Erklärung.

§. 151. Man sagt die Verhältniß der Grösse A zu der Grösse B sey der Verhältniß der Grösse C zu der Grösse D gleich, wenn nachdem die nachfolgenden Grössen B und D in einerley Anzahl von gleichen Theilen getheilt worden sind, in A so viele Theile von B angetroffen werden, als C Theile von D enthält; oder kürtzer, wenn die Grössen A, B, C, D proportional sind. Wenn hingegen, nachdem die Grössen B und D dergestalt getheilt worden sind, A mehrere Theile der Grösse B enthält, als sich Theile von D in der Grösse C befinden, so sagt man C, die Verhältniß von A zu B ist grösser als die Verhältniß von C zu D, und diese ist kleiner als jene.

Anmerckung.

§. 152. Eine Proportion ist nichts anders, als die Gleichheit oder Aehnlichkeit zwoer Verhältnisse (Aequalitas, Similitudo, Identitas). Da wir nun die Verhältniß der Grösse A zu der Grösse B folgendermassen zu bezeichnen pflegen A:B; so so wird man eine Proportion auf nachstehende Art andeuten $A : B = C : D$; in welcher A und C vorhergehende Glieder (termini antecedentes), B und D aber nachfolgende Glieder (termini consequentes) genennt werden. Man pflegt auch überhaupt, wenn man die Proportion $A : B = C : D$ anzeigen will, kurtz zu sprechen, es verhalte sich A zu B, wie C zu D.

Der 1. Zusatz.

§. 153. Wenn die Verhältniß $A : B$ der Verhältniß $C : D$ gleich ist, und man theilet C und D in gleiche Theile deren einer P sey, so ist im Fall die Anzahl derselben Theile in C durch die gantze Zahl m, und die Anzahl eben derselben Theile in D durch eine andre gantze Zahl n ausgedrückt wird, $C = mP$ und $D = nP$, folglich $A : B = mP : nP$. Und dieses wird richtig seyn, was für eine Grösse auch der Theil P haben mag. Daher denn überhaupt $A : B = m : n$. Es kan also eine jede Verhältniß $A : B$ durch gantze Zahlen m, n, welche eben diese Verhältniß gegen einander haben, ausgedrückt werden, und dieses kan entweder gantz genau, oder doch mit einem so kleinen Fehler geschehen, daß derselbe gar nicht geachtet werden darf.

Der 2. Zusatz.

§. 154. Man setze, daß in der Proportion $A : B = m : n$, die Grössen A und B gleichfalls Zahlen sind, und indem N ebenfalls eine andre Zahl

bedeu-

bedeutet, sey $A = m.N$, so wird $B = n.N$, folglich ist $\frac{A}{B} = \frac{m\,N}{n.\,N}$. Da nun dieser letzte Bruch, wenn man ihn kürtzer schreibt, in $\frac{m}{n}$ verwandelt wird, so ist auch $\frac{A}{B} = \frac{m}{n}$, und es giebt uns eine jede Proportion der Zahlen $A:B = m:n$ zween gleiche Brüche $\frac{A}{B} = \frac{m}{n}$.

Der 3. Zusatz.

§. 155. Wenn hingegen die Brüche $\frac{A}{B}$ und $\frac{m}{n}$ einander gleich sind, so wird auch $A:B = m:n$ seyn, und es werden daher allzeit zween gleiche Brüche eine Proportion geben Denn da die Glieder des ersten von diesen Brüchen hervorgebracht werden, wenn man beide Glieder des zweyten durch einerley gantze oder gebrochene Zahl multipliciret (§. 102.); so wird, wenn diese Zahl N ist, $A = m.N$ und $B = n.N$. Da nun $m.N : n.N = m : n$ so ist auch $A:B = m:n$.

Der 4. Zusatz.

§. 156. Wenn die Zahlen m, n die kleinsten sind durch welche die Verhältniß der Zahlen A, B ausgedrückt werden kan, so daß $A : B = m : n$, so werden

werden auch diese Zahlen die kleinsten seyn durch die sich der Bruch $\frac{A}{B}$ ausdrücken läßt. Und wiederum, wenn diese Zahlen m, n, die kleinsten sind durch welche man den Bruch $\frac{A}{B}$ ausdrücken kan; so sind sie auch die kleinsten Zahlen, deren Verhältniß mit der Verhältniß A : B einerley ist. In diesem Falle also, wird die Zahl N, welche durch m multipliciret die Zahl A, und durch n multipliciret die Zahl B hervorbringt, eine gantze Zahl seyn (§. 103): und wenn zwo Zahlen A und B gegeben sind, so findet man die kleinsten Zahlen deren Verhältniß der Verhältniß A : B gleich ist, wenn man sowohl A als B durch den größten gemeinschaftlichen Divisor dieser Zahlen dividiret.

Erklärung.

§. 157. Wenn $A:B=K:L$
$B:C=M:N$
$C:D=P:Q$
$D:E=R:S$, und so weiter,
das ist, wenn das nachfolgende Glied der Verhältniß A : B das vorhergehende Glied in der Verhältniß B : C ist, das nachfolgende Glied C in dieser Verhältniß, das vorhergehende in der dritten C ; D, und so beständig; und man hat

hat ausserdem eine jede dieser Verhältnisse auch durch andre Glieder ausgedrückt, als die erste A : B durch K : L, die andre B : C durch M : N, und so die übrigen: so sagt man die Verhältniß A : C ist aus den Verhältnissen A : B und B : C, oder aus den Verhältnissen K : L und M : N zusammengesetzt (ratio composita). Die Verhältniß aber A : D wird nach eben dieser Redens-Art aus den Verhältnissen A : B und B : C und C : D; oder aus den Vorhältnissen K : L und M : N und P : Q; ferner die Verhältniß A : E aus den Verhältnissen A : B, B : C, C : D, D : E, oder aus den Verhältnissen K : L, M : N, P : Q, R : S, zusammengesetzt seyn, und so weiter.

Erklärung.

§. 158. Wenn alle die Verhältnisse A : B, B : C, C : D, D : E einander gleich sind, folglich auch K : L = M : N = P : Q = R : S; so sagt man, die Verhältniß A : C welche aus den zwoen gleichen A : B und B : C zusammengesetzt wird, ist zweymal so hoch als die Verhältniß A : B oder B : C oder K : L oder

M : N

M:N (ratio duplicata); die Verhältniß A:D welche aus den dreyen gleichen A:B, B:C, C:D zusammengesetzt wird, ist dreymal so hoch als A:B oder eine jede andre dieser gleiche Verhältniß (triplicata); diejenige so aus vier gleichen Verhältnissen zusammengesetzt wird ist vier mal so hoch (quadruplicata), und so ferner. In Ansehung einer jeden von diesen eben benannten Verhältnissen heißt die Verhältniß A : B oder eine jede andre dieser gleiche Verhältniß einfach (simplex). Man sagt aber auch von eben dieser Verhältniß A:B sie sey in Ansehung der zweymal so hohen A:C halb so hoch (subduplicata); in Ansehung der dreymal so hohen Verhältniß A : D ein drittheil so hoch oder dreymal so niedrig (subtriplicata) und so ferner.

Anmerckungen.

§. 159. Eine jede Verhältniß kan aus einer jeglichen Anzahl von andern Verhältnissen auf unendlich viele Arten zusammengesetzt werden. Soll man die Verhältniß A:D aus dreyen andern zusammen setzen, so nehme man zwey Glieder B und C nach Belieben an, und mache die Verhältniß A:B der Verhältniß K:L gleich, die Verhältniß B:C aber = M:N und die Verhältniß C:D = P:Q. Alsdenn wird die Verhältniß A:D allerdings aus den Verhältnissen A:B, B:C, und C:D, oder aus den Verhältnissen K:L, M:N, P:Q zusammen-

 gesetzt

gesetzt seyn. Eben so kan man auch eine jede Verhältniß aus einer beliebigen Anzahl gleicher Verhältnisse zusammensetzen; und es kan folglich eine und eben dieselbe Verhältniß, bald eine einfache bald eine zusammengesetzte, eine zweymal, dreymal, oder mehrmal so hohe, oder auch eine zweymal, dreymal oder mehrmal so niedrige Verhältniß genennt werden, nachdem man ihren Ursprung betrachtet, oder sie mit einer andern Verhältniß vergleichet.

Im Lateinischen bedeutet ratio dupla gantz was anders als ratio duplicata; ratio tripla was anders als ratio triplicata, subdupla als subduplicata &c. Ratio dupla ist eine jede Verhältniß deren erstes Glied doppelt so groß ist als das zweyte, als 2 : 1; 6 : 3; 18 : 9 u. d. gl. Ratio tripla aber hat das erste Glied dreymal so groß als das zweyte, als 3 : 1; 12 : 4; 18 : 6; u. d. gl. Rationes subduplae sind 1 : 2; 5 : 10; 7 : 14; da das erste Glied halb so groß ist als das zweyte: Man hatte vor diesem noch viele andre dergleichen Wörter, welche die Verhältnisse an sich betrachtet ausdrücken solten, die aber niemals sehr in Gebrauch gekommen sind, und desto leichter konten vergessen werden. Heut zu Tage braucht man anstatt aller dieser Wörter zwo Zahlen, welche die Verhältniß haben, die man anzeigen will; und sagt zum Beyspiel anstatt ratio dupla, die Verhältniß 2 : 1, anstatt subdupla, die Verhältniß 1 : 2, und so in den übrigen Fällen. Indessen thut man wohl, daß man im Lateinischen eine aus zwoen gleichen zusammenmengesetzte Verhältniß anders nennet als ratio dupla, weil bey einer solchen Verhältniß in der That das erste Glied nicht nothwendig doppelt so groß ist als das zweyte, ob dieses zwar seyn kan; und eben so wird mit vollem Recht eine aus dreyen gleichen zusammengesetzte Verhältniß nicht tripla sondern triplicata genennt. Es ist allzeit gut wenn man verschiedne Begriffe an verschiedne Wörter bindet, und es wird dadurch viele Verwirrung vermieden.

Im Teutschen aber wird zwar die Verhältniß 2 : 1 nicht leicht eine doppelte Verhältniß, oder die Verhältniß 3 : 1 eine dreyfache genennet, und man könnte also diese Wörter anstatt ratio duplicata, triplicata &c gebrauchen. Indessen bringt das Wort der gedoppelten allerdings den Begrif einer grössern Verhältniß mit sich, und das Wort einer dreyfachen den Begrif einer noch grösseren; und doch ist eine aus zwoen gleichen zusammengesetzte Verhältniß nicht immer grösser als die einfache, wenn man die Grösse der Verhältniß in dem Verstande nimmt, welcher (§. 151.) erklärt worden ist. Man hat derowegen alle Wörter welche die bereits erklärte Grösse der Verhältniß in das Gedächtniß bringen konten, lieber gäntzlich vermeiden, und was man sonst, besonders im Lateinischen, in einem gantz andern Verstand ebenfalls eine Grösse der Verhältniß zu nennen pflegt, hier eine Höhe derselben nennen wollen; in der Hofnung aller Zweydeutigkeit dadurch gäntzlich auszuweichen. Das Wort wird auch sonst in ähnlichen Fällen auf eben die Art gebraucht; und man nennt eine Potenz höher als eine andre, ob sie zwar nicht immer grösser ist. Eben so ist auch die höhere Verhältniß nicht immer grösser als die niedrigere, ob sie zwar grösser seyn kan. Alles dieses wird durch die Anwendung vollkommen deutlich werden.

Lehrsatz.

§. 160. Wenn $A : B = C : D$ (indem die Buchstaben m, n eine jede ganze Zahl bedeuten können, der Unterschied der beiden Grössen A und B aber überhaupt, durch $A - B$ oder $B - A$ bezeichnet wird, ohne darauf zu sehen welche von beiden die größte ist); so ist auch

$$B : A = D : C$$
$$A + B : A = C + D : C$$
$$A + B : B = C + D : D$$
$$A : A + B = C : C + D$$
$$B : A + B = D : C + D$$
$$A - B : A = C - D : C$$
$$A - B : B = C - D : D$$
$$A : A - B = C : C - D$$
$$B : A - B = D : C - D$$
$$A + B : A - B = C + D : C - D$$
$$A - B : A + B = C - D : C + D$$
$$A : nB = C : nD$$
$$nB : A = nD : C$$
$$nA : B = nC : D$$
$$B : nA = D : nC$$
$$mA : nB = mC : nD$$
$$nB : mA = nD : mC.$$

Beweis

Beweis.

Denn wenn in der angenommenen Propor= Fig. tion A : B = C : D, das erste und zweyte Glied in solche Theile, die unter einander gleich sind, und das dritte und vierte Glied in andre, ebenfalls gleiche Theile getheilet werden, und zwar dergestalt, daß in dem ersten Gliede A sich so viele Theile befinden, als in dem dritten C, und in dem zweyten B so viele als in dem vierten D: so ist klar, daß auch in einer jeden der Proportionen, von welchen wir behaupten, daß sie aus der angenommenen A : B = C : D gemacht werden können, das erste und zweyte Glied in gleiche Theile, und das dritte und vierte Glied in andre ebenfalls gleiche Theile getheilet seyn werde; in eben diejenigen nehmlich, worein die Glieder der angenommenen Proportion A : B = C : D getheilt worden sind; und daß auch in diesen Proportionen, zum Beyspiel in A + B : A — B = C + D : C — D, das erste Glied A + B so viele Theile als das dritte C + D, und das zweyte Glied A — B so viele Theile als das vierte C — D haben werde. Alle diese Proportionen sind also richtig (§. 145.).

Lehrsatz.

§. 161. Wenn die Verhältnisse A : B und C : D einander gleich sind, und die Glieder der ersten sind mit den Gliedern der letzten von einerley Art; so wird, wenn man die Summe oder die Differenz der vorhergehenden und der nachfolgenden Glieder nimmt, die Verhältniß $A+C : B+D$, oder $A-C : B-D$ einer jeglichen der vorigen Verhältnisse A : B, oder C : D gleich seyn.

Beweis.

Fig. 4. 5 Man setze, daß die Glieder der Proportion $A : B = C : D$ dergestalt getheilt worden sind, wie dieses bey dem Beweis des vorhergehenden Lehrsatzes geschehen ist. Weil nun in A so viele Theile sind als in C: so addire man einen jeglichen Theil der Grösse A zu einem jeglichen Theile der Grösse C, welcher ihm in der Ordnung gegen über steht, und setze aus diesen vergrösserten Theilen, E zusammen, welches seyn wird $= A + C$, und eben so viele gleiche Theile enthalten wird, als A oder C enthalten. Auf die nehmliche Art setze man auch F zusammen, indem man einen jeglichen Theil der Grösse B zu einem jeglichen Theile der Grösse D hinzufüget: dieses F wird $B + D$ seyn, und eben so viele gleiche Theile

Theile enthalten, als B oder D. Hieraus folgt aber, daß $E:F = A:B = C:D$ (§. 145.), welches das erste war.

Um das zweyte zu erweisen, nehme man den Unterschied von jeglichen zween Theilen in den Gliedern A und C, welche einander in der Ordnung gegen über stehen, und aus diesen Unterschieden, welche unter sich gleich, und an der Zahl so viele seyn werden, als viele Theile in A oder C sind, setze man G zusammen, welches nichts anders seyn wird, als $A - C$. Eben so verfahre man mit den Gliedern B und D, so wird das hervorgebrachte Glied $H = B - D$ seyn; und es wird dieses H so viele Theile enthalten, als B oder D, und diese Theile werden unter sich, zugleich aber auch den Theilen in G gleich seyn. Folglich ist $G:H = A:B = C:D$.

Der 1. Zusatz.

§. 162. Hieraus kan man überhaupt folgendes schliessen: Wenn die Verhältnisse $A:B$, $C:D$, $E:F$, $G:H$ ꝛc. alle einander gleich sind, das ist, wenn

$$A:B = A:B$$
$$C:D = A:B$$
$$E:F = A:B$$
$$G:H = A:B,$$

so ist auch

$$(A+C+E+G):(B+D+F+H) = A:B,$$

oder $(A-C+E-G):(B-D+F-H) = A:B$,

was

was vor Glieder, und wie viele Glieder man auch abziehen mag; wenn nur allzeit die abgezognen Glieder, wie hier C und D, G und H, zu einer Verhältniß gehören.

Der 2. Zusatz.

§. 163. Wenn man die Glieder einer Verhältniß A : B addiret, so wird $A:B = 2A:2B = 3A:3B = nA:nB$, was vor eine gantze Zahl auch n bedeuten mag. Wenn also $A:B = C:D$, so ist auch $nA : nB = C : D$.

Der 3. Zusatz.

§. 164. Auch ist $\frac{A}{n} : \frac{B}{n} = A : B$. Denn wenn man die Glieder der ersteren Verhältniß durch n multipliciret, bleibt die Verhältniß der Producte eben dieselbe: diese Producte sind aber nichts anders, als die Glieder A, B.

Der 4. Zusatz.

§. 165. Hieraus aber folgt, daß aus der Proportion $A:B = C:D$ allzeit diese andre $mA:mB = nC:nD$ gemacht werden könne, die Zahlen m, n mögen gantze Zahlen, oder Brüche seyn.

Der 5. Zusatz.

§. 166. Weil also $P : Q = P : Q$; so ist auch $mP : mQ = nP : nQ$. Und weil mP das Glied A einer jeden Proportion $A : B = C : D$ bedeuten kan,

kan, indem nP anstatt des Gliedes B, mQ anstatt des Gliedes C, und nQ an statt des Gliedes D eben dieser Proportion gesetzt wird, so ist auch bey einer jeden Proportion, deren Glieder alle von einerley Art sind, wenn man diese Glieder verwechselt, A : C = B : D.

Der 6. Zusatz.

§. 167. Es sind aber oben (§. 160.) aus der Verhältniß A : B = C : D folgende Verhältnisse hergeleitet worden A : nB = C : nD, und nA : B = nC : D; daher denn, wenn man die Glieder beider Verhältnisse durch einerley Zahl n dividiret, auch die Proportionen $\frac{A}{n} : B = \frac{C}{n} : D$ und $A : \frac{B}{n} = C : \frac{D}{n}$ richtig seyn werden. Es bleibt also die Proportion ungeändert, wenn man gleich die vorhergehenden Glieder der Verhältnisse, das ist, das erste und dritte Glied der Proportion, oder deren nachfolgende Glieder, das ist, das zweyte und vierte Glied der Proportion, durch einerley Zahl dividiret.

Der 7. Zusatz.

§. 168. Es wird also der Satz, welcher ebenfalls §. 160. gezeigt worden ist, daß nehmlich, wenn A : B = C : D, auch mA : nB = mC : nD seyn werde, im Fall m und n gantze Zahlen sind, auch richtig seyn, wenn diese Zahlen Brüche sind.

Lehrsatz.

§. 169. Wenn die kleineren Buchstaben, Zahlen, die grösseren hingegen, entweder Zahlen, oder andre Grössen andeuten, und es ist $m:n = A:Z$, so ist $Z = \frac{n}{m}A$, und $mZ = nA$. Und wenn $Z = \frac{n}{m}A$, oder $mZ = nA$, so ist $m:n = A:Z$.

Beweis.

Wenn man in der Proportion $m:n = A:Z$ setzet $A = mP$, so wird $Z = nP$, und wenn so wohl A als mP durch m divididiret wird, $P = \frac{A}{m}$. Schreibt man nun dieses $\frac{A}{m}$ anstatt des Buchstabens P, so wird $Z = \frac{nA}{m}$, folglich, wenn man auf beiden Seiten durch m multipliciret $mZ = nA$.

Setzt man hingegen $Z = \frac{nA}{m}$, oder $mZ = nA$, so nehme man die Verhältniß $m:n = A:X$,

$= A : X$, wodurch wird $mX = nA$, also auch $mX = mZ$, und $X = Z$, folglich $m : n = A : Z$.

Der 1. Zusatz.

§. 170. Wenn daher

$$\begin{aligned} m : n &= A : B \\ p : q &= B : C \\ r : s &= C : D \\ t : v &= D : Z \end{aligned}$$

so ist

$$B = \frac{n}{m} . A$$

$$C = \frac{q}{p} . B = \frac{nq}{mp} . A$$

$$D = \frac{s}{r} . C = \frac{nqs}{mpr} . A$$

$$Z = \frac{v}{t} . D = \frac{nqsv}{mprt} . A$$

Die Verhältniß $A : Z$ ist aus den Verhältnissen $A : B$, $B : C$, $C : D$ und $D : Z$ zusammengesetzt, welche durch die Verhältnisse der Zahlen $m : n$, $p : q$, $r : s$, $t : v$ gegeben sind (§. 157.). Wenn man also die Verhältnisse, welche zusammengesetzt werden sollen, durch Zahlen ausgedrückt hat, und es ist das vorhergehende Glied der zusammengesetzten Verhältniß A, gegeben, so findet man das nachfolgende Glied Z, wenn man setzet $mprt : nqsv = A : Z$; das ist, wie das Product aus allen diesen vorhergehenden Zahlen, zu dem Product aus allen nachfolgenden,

genden, so verhält sich das vorhergehende Glied der zusammengesetzten Verhältniß, zu dem nachfolgenden Gliede eben dieser Verhältniß.

Der 2. Zusatz.

§. 171. Es ist also die Verhältniß des Products mprt zu dem Product nqsv, der zusammengesetzten Verhältniß A : Z gleich.

Der 3. Zusatz.

§. 172. Da durch die verschiednen Veränderungen, welche man in der Ordnung der multiplicirenden Zahlen machen kan, die Producte nicht geändert werden (§. 94.); folglich auch die Verhältniß derselben ungeändert bleibt: so wird auch, wenn man die vorhergehenden, oder die nachfolgenden Glieder der zusammenzusetzenden Verhältnisse in allerley Ordnungen versetzet, die zusammengesetzte Verhältniß nicht geändert. Und wenn man zum Beyspiel annimmt

$$\begin{aligned} p : s &= A : \beta \\ m : v &= \beta : \gamma \\ r : n &= \gamma : \delta \\ t : q &= \delta : X \end{aligned}$$

so wird, wenn gleich die Glieder β, γ, δ von den Gliedern B, C, D des ersten Zusatzes gäntzlich unterschieden seyn solten, dennoch X und Z einerley seyn. Denn weil mprt = pmrt und nqsv = svnq, so ist auch mprt : nqsv = pmrt : svnq, folglich A : Z = A : X, und X = Z.

Der

Der 4. Zusatz.

§. 173. Diese Verwechslung der Ordnungen wird eben keine andre Folgen haben, wenn gleich anstatt der Zahlen m, n, p, q, r, s, t, v andre beliebige Grössen genommen werden, deren jede sich zu einer jeglichen andern verhalte, wie die Zahl, an deren Stelle sie gesetzt worden ist, zu der Zahl, deren Stelle die andre eingenommen hat. Denn wenn man diese Bedingung voraus setzt, und an die Stelle der Zahl n die Grösse mP bringt, so muß an die Stelle der Zahl n die Grösse nP, an die Stelle von p, die Grösse pP, gesetzt werden, und so fort. Es ist aber klar, daß wenn man in dem Exempel des 1. Zusatzes

$$m : n = A : B$$
$$p : q = B : C$$
$$r : s = C : D$$
$$t : v = D : Z$$

und in dem Exempel des dritten Zusatzes

$$p : s = A : \beta$$
$$m : v = \beta : \gamma$$
$$r : n = \gamma : \delta$$
$$t : q = \delta : X$$

anstatt der Zahlen m, n, p, q, etc. sich der Grössen mP, nP, pP, qP. etc. bedienet, eben die vorigen Grössen B, C, D, Z, und β, γ, δ, X, heraus kommen.

Der 5. Zusatz.

§. 174. Durch diese Sätze kan öfters die Anzahl der Verhältnisse, welche zusammenzusetzen sind, vermin=

vermindert werden. Wenn man folgende Verhältnisse zusammensetzen soll:

$$\begin{array}{ccc} M & : & N \\ P & : & M \\ Q & : & P \\ R & : & S, \end{array}$$

und man nimmt das Glied A, wenn es nicht gegeben ist, nach Belieben an, so kan man, wie leicht einzusehn ist, sagen,

$$\begin{array}{l} M : M = A : A \\ P : P = A : A \\ Q : N = A : B \\ R : S = B : Z. \end{array}$$

Da nun die zwo ersteren Proportionen hier gantz unnütz sind, so sieht man, daß aus den beiden Verhältnissen Q : N und R S eben die Verhältniß A : Z zusammengesetzt wird, welche man aus den vier anfangs gegebenen Verhältnissen zusammen setzen kan, Man findet aber diese zwo Verhältnisse, oder zwo andre Q : S und R : N, aus denen eben dieselbe Verhältniß A : Z zusammengesetzt wird, wenn man die Glieder M und P, welche sich sowohl unter den vorhergehenden, als unter den nachfolgenden Gliedern der vier gegebenen Verhältnisse befinden, wegläßt.

Der 6. Zusatz.

§. 175. Werden hiedurch die Verhältnisse, welche man zusammensetzen soll, auf eine einzige gebracht, so muß diese nothwendig, derjenigen Verhältniß,

hältniß, die man als zusammengesetzt betrachtet, gleich seyn. Wenn also

A : B = C : D und

E : B = C : F,

das ist, wenn die mittleren Glieder zweyer Proportionen einerley sind, und man schreibt dieselben folgendermassen

B : A = D : C

E : B = C : F

so ist klar, daß die Verhältniß, welche aus den beiden B : A und E : B zusammengesetzt wird, auch aus der einzigen Verhältniß E : A zusammengesetzt werde, oder diese Verhältniß E : A selbst sey; da nun auch aus den Verhältnissen D : C und C : F die Verhältniß D : F zusammengesetzt wird, so ist E : A = D : F.

Der 7. Zusatz.

§. 176. Wenn aber A : B = M : N
und C : D = N : M, welche Verhältniß N : M die vorige M : N umgekehrt ist, so wird diejenige Verhältniß, welche aus den zwoen A : B und C : D zusammengesetzt ist, die Verhältniß zwoer gleichen Grössen seyn (ratio aequalitatis). Denn es wird eben dieselbe auch aus den Verhältnissen M : M und N : N zusammengesetzt, und es kan also keine andre Verhältniß herauskommen, als die Verhältniß 1 : 1.

Der 8. Zusatz

§. 177. Und wenn die Verhältniß, welche aus zwoen andern A:B und D:C zusammengesetzt wird, die Verhältniß zwoer gleichen Grössen ist, (welches man auch folgendermassen auszudrücken pflegt $A \times D = B \times C$) so wird die erstere Verhältniß A : B der zwoten D:C gleich: wenn man diese verkehrt nimmt, das ist es wird A:B = C:D. Denn wenn man annimmt A:B = C:Q, so wird, da allzeit ist D:C = D:C, die aus den beiden A : B und D:C zusammengesetzte Verhältniß, der Verhältniß D:Q gleich seyn. Da nun vorausgesetzt worden ist, daß diese zusammengesetzte Verhältniß, die Verhältniß zwoer gleichen Grössen sey, so ist D = Q, folglich A:B = C:D.

Der 9. Zusatz.

§. 178. Wenn in den Proportionen

$$m : n = M : N$$
$$p : q = P : Q$$

alle Glieder Zahlen sind, so ist mp : nq = M.P : N.Q. Denn es ist die Verhältniß mp : nq aus den Verhältnissen m:n und p:q, und die Verhältniß M.P : N.Q aus den Verhältnissen M:N und P:Q, welche jenen gleich sind, zusammengesetzt. Daher auch, wenn man, bey einer grössern Anzahl von Proportionen, die Glieder derselben in ihrer Ordnung durch einander multipliciret, eine neue Proportion entstehen wird (§. 171.).

Der

Der 10. Zusatz.

§. 179. Multipliciret man die Glieder einer Proportion in sich selbst, so erhält man die Quadrate derselben, aus diesen die Würfelzahlen, und nach und nach die höheren Potenzen dieser Glieder. Es sind also die Quadrate, die Würfel, und die höheren Potenzen der Proportional-Zahlen gleichfalls unter sich proportional.

Der 11. Zusatz.

§. 180. So sind auch die Wurtzeln von proportionalen Quadraten, selbst proportional. Denn wenn wir annehmen, daß die Wurtzeln der proportionalen Quadrate A, B, C, D, die folgenden a, b, c, d sind, und diese wären nicht proportional, so wird a : b = c : e und diese Zahl e grösser oder kleiner seyn als d. Wenn man also die Quadrate dieser Zahlen nimmt, so ist A : B = C : E, welches E nun gleichfalls grösser oder kleiner ist als das Quadrat D, so doch mit der angenommenen Proportion A : B = C : D nicht bestehen kan. Es ist aber leicht einzusehen, daß eben dieses auch von den Cubic-Wurtzeln, oder von den Wurtzeln einer jeden höhern Potentz zu sagen sey.

Der 12. Zusatz.

§. 181. Wenn m : n = A : B
m : n = B : C
m : n = C : D
m : n = D : E und so weiter,

so wird die Verhältniß A : C, welche zweymal so hoch ist als die Verhältniß m : n, auch der Verhältniß des Quadrats von m zu dem Quadrat von n gleich seyn. Die Verhältniß A : D, welche dreymal so hoch ist als die Verhältniß m : n, ist auch mit der Verhältniß des Cubus von m zu dem Cubus von n einerley; die Verhältniß A : E, welche viermal so hoch ist als die Verhältniß m : n, ist auch die Verhältniß der vierten Potenz von m zu der vierten Potenz von n, und so ferner.

Der 13. Zusatz.

§. 182. In einer zusammenhängenden Proportion A : B = B : C ist das Product aus den äusern Gliedern A.C dem Quadrat des mittleren Gliedes B.B gleich (§. 169.). Wenn also die äuseren Glieder A und C gegeben sind, so findet man die mittlere Proportional-Zahl B wenn man aus dem Product A.C die Quadratwurtzel ziehet (§. 139).

Anmerckungen.

§. 183. Diese Lehrsätze von den Proportionen leisten in der gantzen Mathematick sowohl als in dem gemeinen Leben den wichtigsten Nutzen. Besonders läßt sich dieses von dem letzten (§. 169.) sagen. Es kommt nichts öfter vor, als daß zu dreyen gegebenen Zahlen die vierte gesucht wird, welche sich zu der dritten verhalte, wie sich die zwote zu der ersten verhält; oder daß man zu fünf gegebenen Zahlen die sechste verlangt, deren Verhältniß zu der fünften, aus der Verhältniß der vierten zu der dritten,

und

und der zwoten zu der ersten zusammengesetzt sey; oder daß man zu sieben gegebenen Zahlen die achte finden soll, deren Verhältniß zu der siebenden aus den Verhältnissen der sechsten zu der fünften, der vierten zu der dritten und der zwoten zu der ersten zusammengesetzt werde, u. s. f. Die Regeln nach welchen man dergleichen Zahlen findet, nennt man nach einander die Regel de Tri oder die Regel von dreyen, die Regel von fünfen, die Regel von sieben rc. und man kan eben dergleichen Fragen bey neun, eilf, oder mehreren gegebenen Zahlen aufwerfen.

§. 184. Es ist aber kein Zweifel, daß die Grössen welche durch die Zahlen ausgedrückt werden, sich eben so wie diese Zahlen gegen einander verhalten. Wenn man also vorher weis, daß die Verhältniß der gesuchten Grösse zu den gegebenen, mit der Verhältniß der hier gesuchten Zahl zu den gegebenen Zahlen einerley ist, so ist nicht die geringste Ursache zu zweifeln, daß die gesuchte Zahl, die Grösse welche man sucht, richtig ausdrücken werde. Es beschäftigt sich aber die Arithmetick nicht damit, die Verhältnisse der Grössen selbst gegen einander zu zeigen. Diese muß man sich aus solchen Theilen der Wissenschaften bekannt machen, welche von allen Arten der Grössen besonders handeln. Inzwischen lassen sich viele dergleichen Verhältnisse bloß durch den natürlichen Verstand begreifen: andre hängen von der Willkühr der Menschen, von Gesetzen oder Verträgen ab, und können niemand, der von diesen unterrichtet ist, unbekannt seyn.

§. 185. So, wenn eine Grösse durch eine Zahl ausgedrückt ist, welche sich auf eine gewisse Einheit A beziehet, und es soll eben diese Grösse durch eine Zahl, welche sich auf eine andre Einheit B beziehet, ausgedrückt werden: es ist aber bekannt, daß eine andre Grösse S aus der Zahl m der Einheiten A, und aus der Zahl n der Einheiten B zusammengesetzt sey: so ist klar daß sich die Anzahl der Einheiten A welche sich in der zuerst gegebenen Grösse befinden, zu der Anzahl der Einheiten B welche in eben der Grösse anzutreffen sind, wie m zu n verhalten werde. Wir wissen daß zween Thaler so viel ausmachen als drey Gulden; wird uns also eine Summe von 31 Thalern vorgelegt, und gefragt, wie viele Gulden in dieser Summe sind: so sagen wir, wie 2 zu 3 so verhält sich 31 zu der gesuchten Anzahl der Gulden; und diese ist folglich $= \frac{3 \times 31}{2}$ $= \frac{93}{2} = 46\frac{1}{2}$.

§. 186. Da aber aus dem vorhergehenden bekannt ist, daß in gleichen Brüchen, die Verhältniß der Nenner gegen die Zehler einerley sey (§. 155.), so kan man, wenn zu einem gegebenen Bruch ein andrer verlangt wird der ihm gleich sey, und dessen Nenner gleichfalls gegeben ist, folgendergestalt schliessen: Wie der Nenner des gegebenen Bruchs zu dem Zehler desselben, so verhält sich der gegebene Nenner des gesuchten Bruchs zu dem gesuchten Zehler. Man soll einen Bruch finden, welcher dem Bruch $\frac{2}{5}$ gleich, und dessen Nenner 24 sey; so ist

der

der Zehler dieses Bruchs $\frac{3 \times 24}{5} = \frac{72}{5} = 14\frac{2}{5}$, folglich der verlangte Bruch $\frac{14\frac{2}{5}}{24}$. Wenn also $\frac{3}{5}$ als ein Bruch von der Einheit eines Thalers angesehen wird, deren vier und zwanzigster Theil ein Groschen ist, so enthält der gesuchte Bruch $14\frac{2}{5}$ Groschen.

§. 187. Auf diese Art wird man solche Grössen, welche durch Zahlen ausgedrückt sind die sich auf verschiedne Einheiten beziehen, deren wir in dem gemeinen Leben sehr viele haben, leicht durch Zahlen ausdrücken, deren Einheiten einerley sind: und man wird, zum Beyspiel, bey einer Summe Geldes, welche so viele Thaler und so viele Groschen, oder so viele Gulden und so viele Groschen enthält, ohne Mühe die Anzahl aller Groschen bestimmen, welche sich in der gantzen Summe befinden; oder auch ein Gewicht, von so vielen Pfunden so vielen Lothen und so vielen Quentgen, allein durch die Zahl der Quentgen, aus denen dieses Gewicht bestehet, ausdrücken. Soll aber eine Verhältniß bloß durch Zahlen gegeben werden, so müssen die Einheiten auf welche sich diese Zahlen beziehen gleich seyn. Ist dieses nicht, so muß man nicht allein auf die Grösse der Zahlen, sondern zugleich auf die Grösse der Einheiten Achtung geben: als wenn jemand sagte, die Grösse A verhalte sich zu der Grösse B, wie 5 Gulden zu 2 Thalern.

§. 188. Wem diese Dinge bekannt sind, der wird die Regel Detri leicht auf den Kauf und Verkauf, und auf andre dergleichen Handlungen anwenden, und den Preis einer vorgelegten Waare finden, wenn ihm der Preis eines andern Stücks von eben dieser Waare bekannt ist, oder umgekehrt das Maas oder Gewicht der Waare bestimmen, wenn der Preis gegeben ist. Wenn 5 Pfund von einer Waare 7 Thaler kosten, wie viel kosten 13 Pfund von eben dieser Waare? Weil, wie 5 Pfund zu 13 Pfund, so der Preis derer 5 Pfund zu dem Preise derer 13 Pfund, oder kürtzer $5 : 13 = 7 : q$, so ist $q = \frac{7 \times 13}{5} = \frac{91}{5} = 18\frac{1}{5}$.

§. 189. Wenn man 17 Pfund von einer Waare vor 7 Thaler kauft, wie viele Pfunde von eben dieser Waare wird man vor 10 Thaler kaufen können? Es ist $7 : 10 = 17 : q$, oder, wie 7 Thaler zu 10 Thalern, so verhalten sich 17 Pfund zu der gesuchten Anzahl der Pfunde, welche q also seyn wird $\frac{17 \times 10}{7} = \frac{170}{7} = 24\frac{2}{7}$.

§. 190. Was aber die Regel von fünfen anlangt, so wird dieselbe, bey aufgeworfenen Fragen folgendergestalt gebraucht. Ein Capital von 330 Thalern giebt in der Zeit von 17 Monathen 15 Thaler Zinsen: wie viele Zinsen geben 500 Thaler in der Zeit von 30 Monathen? Es sey die gesuchte Zahl der Zinsen q, und die Zahl der Zinsen, welche 500 Thaler

Thaler in 17 Monathen geben, sey n; weil nun die Zinsen welche in einerley Zeit gegeben werden, sich wie die Capitale, die Zinsen von einerley Capitalen hingegen sich wie die Zeiten verhalten, so ist

$$330 : 500 = 15 : n$$
$$17 : 30 = n : q.$$

Es wird nehmlich (§. 157.) die Verhältniß der gegebenen Zinsen zu den gesuchten q, aus der Verhältniß der Capitale 330 : 500 oder 33 : 50, und der Verhältniß der Zeiten 17 : 30 zusammengesetzt, und es ist daher $33 \times 17 : 50 \times 30 = 15 : q$.

Folglich $q = \frac{50 \times 30 \times 15}{33 \times 17} = 40 \frac{20}{187}$.

§. 191. Die Regel von Sieben Zahlen, oder auch die noch mehr zusammengesetzten, werden mit eben so wenig Schwierigkeit angewendet. Gesetzt es sey nachstehende Frage zu beantworten. Ein Capital von 3300 Thalern giebt in 18 Monathen 180 Thaler Zinsen. Ein Capital von 5000 Thalern ist gegen eben dieselbe Zinsen auf 30 Monathe ausgeliehen worden. Diese Zinsen aber werden, durch einen Vertrag oder richterlichen Ausspruch, dahin gemäßiget, daß anstatt 5 Thalern nur vier bezahlet werden sollen. Was nach diesem Ausspruch gezahlet worden ist, soll unter einen Bruder und eine Schwester dergestalt getheilet werden, daß der Bruder zwey drittheile, die Schwester hingegen nur ein drittheil bekomme. Wie groß wird der Antheil des Bruders seyn?

Man setze $3300 : 5000 = 180 : m$
$$18 : 30 = m : n$$
$$5 : 4 = n : p$$
$$3 : 2 = p : q,$$
so drückt m die Zinsen von dem Capital 5000 in der Zeit von 18 Monathen aus, n die Zinsen von eben diesem Capital in 30 Monathen, p die durch ein Urtheil oder Vertrag gemässigte Zinsen, und q endlich den Theil derselben, welchen der Bruder empfängt. Und es wird die Verhältniß $180 : q$, aus denen übrigen Verhältnissen, in der Ordnung in welcher sie geschrieben sind, zusammengesetzt, so daß $3300 \times 18 \times 5 \times 3$ zu $5000 \times 30 \times 4 \times 2$ sich verhält wie 180 zu q (§. 170.). Es ist daher
$$q = \frac{5000 \times 30 \times 4 \times 2 \times 180}{3300 \times 18 \times 5 \times 3} = 242\tfrac{14}{33}.$$

§. 192. Es können aber die arithmetischen Arbeiten, durch welche eine gesuchte Zahl am einfachsten ausgedrückt wird, öfters sehr abgekürzt werden. Die Art hiezu zu gelangen giebt der 5te Zusatz an die Hand; man sieht aber dieses sowohl, als die übrigen Erleichterungen der Rechnung noch geschwinder ein, wenn man die Zahl q anfangs in Gestalt eines Bruchs schreibet, wie dieses in allen vorhergehenden Exempeln geschehen ist. Denn wenn man alsdenn einen jeden der Factoren, welche sich in dem Zehler dieses Bruchs finden, durch eine Zahl dividiret, durch welche sich auch einer der Factoren im Nenner dividiren läßt, so werden diese Factoren hiedurch sehr verkleinert, und die Multiplication derselben,

selben, wenn man sie vorher so viel man kan dividiret, öfters sehr leicht (§. 97.). Wenn auf diese Art, in dem zuletzt herausgebrachten Bruch

$$\frac{5000 \times 30 \times 4 \times 2 \times 180}{3300 \times 18 \times 5 \times 3}$$

die Factoren 5000 und 3300 durch 100 dividiret, und der hiedurch entstehende Quotient 50 im Zehler, zugleich mit dem Factor 5 im Nenner durch 5 dividiret werden; hiernächst der Factor 180 im Zehler und 18 im Nenner durch 18; ferner 30 im Zehler und 3 im Nenner durch 3 dividiret wird; so wird der weitläuftige Bruch in den folgenden verwandelt: $\frac{10 \times 10 \times 4 \times 2 \times 10}{33 \times 1 \times 1 \times 1}$, welcher, wie man leicht einsieht, dem Bruch $\frac{8000}{33}$ gleich ist. Es ist also die gesuchte Zahl $242\frac{14}{33}$.

§. 193. Wenn aber zwischen zwo gegebenen Zahlen die mittlere Proportionalzahl verlangt wird, so findet man dieselbe selten, und nur alsdenn genau, wenn durch die Multiplication der gegebenen Zahlen, oder der äuseren Glieder der verlangten Proportion eine Quadratzahl entstehet (§. 182.). So ist zwischen 2 und 8 die mittlere Proportionalzahl 4, weil $2 \times 8 = 16$ eine Quadratzahl ist. Hingegen ist zwischen 2 und 10 die mittlere Proportionalzahl irrational, und wenn man dieselbe in zehentheiligen Brüchen schaffen soll, so sind die ersten Zifern derselben 4, 473, und man muß die folgenden finden, indem man das Ausziehen der Wurzel ohne Ende fortsetzet (§. 139. 140.).

Fünfter Abschnitt
Von den Logarithmen.

Erklärung.

§. 194.

Eine Reihe (Series) ist eine Menge von Zahlen, welche nach einem gemeinschaftlichen Gesetz auf einander folgen. Man nennt sie auch eine Progreßion, und unter denselben ist die Arithmetische diejenige, in welcher jedes vorhergehende Glied von dem unmittelbar darauf folgenden, um einerley Zahl unterschieden ist. Hingegen heißt diejenige eine Geometrische Reihe oder Progreßion, in welcher jedes vorhergehende Glied zu dem nächstfolgenden einerley Verhältniß hat.

Anmerckung.

§. 195. Man kan sich ausser diesen, unendlich viele Reihen vorstellen, in deren jeder die Glieder nach einem besondern, von den übrigen verschiednen Gesetz auf einander folgen. Unter den Arithmetischen ist diese 1, 2, 3, 4, 5, 2c. in welcher die Zahlen in der natürlichsten Ordnung fortgehen, so daß die Differenz von jeden zwey unmittelbar neben einander

stehen=

stehenden Gliedern 1 ist. Zu eben dieser Gattung der Reihen gehören die folgenden: 2, 4, 6, 8, 10 2c. und 1, 3, 5, 7, 9, 11, 2c bey denen der Unterschied jeglicher zwey unmittelbar auf einander folgenden Glieder 2 ist, und unendlich viele andre.

Geometrische Reihen hingegen sind diese; 1, 2, 4, 8, 16, 32 2c. und 1, 3, 9, 27, 81, 243, 2c. und 2, 3, $\frac{9}{2}$, $\frac{27}{4}$, $\frac{81}{8}$, $\frac{243}{16}$, und unzehlige andre.

Der 1. Zusatz.

§. 196. Eine Arithmetische Reihe ist uns gegeben, so bald uns ein Glied derselben, und die Differenz dieses Gliedes von dem nächst folgenden bekannt ist. Denn wenn wir zu dem gegebenen Gliede diese Differenz addiren, oder von demselben subtrahiren, so können wir alle übrigen Glieder, so wohl die nachfolgenden, als die vorhergehenden, herausbringen. Es sey das gegebene Glied 7, und die Differenz 3, so sind die Glieder der Reihe, welche grösser sind als 7, diese; 10, 13, 16, 19, 22 2c. die kleinern hingegen 4, 1, —2, —5, —8, 2c. Es kan aber das gegebene Glied sowohl als die Differenz, ein Bruch, oder auch eine Irrational-Zahl seyn.

Der 2. Zusatz.

§. 197. Es seyn A, B, C, D, E, F ein beliebiger Theil einer arithmetischen Reihe, welche man von beiden Seiten ohne Ende fortsetzen kan: so ist der Unterschied der Glieder A und C, zwischen welchen sich noch ein andres Glied B befindet, zweymahl so

groß,

groß, als der Unterschied der Glieder A und B, oder B und C; der Unterschied der Glieder A und D zwischen welchen noch zwey andre stehen, ist dreymahl so groß, als die eben benannte Differenz der Glieder A und B, oder B und C; der Unterschied der Glieder A und E, zwischen denen man drey andre Glieder zehlet, ist viermahl so groß, und so ferner.

Der 3. Zusatz.

§. 198. Wenn man also aus einer arithmetischen Reihe verschiedne Glieder nach Willkühr ziehet, welche alle in der Reihe gleich weit von einander stehen; so werden dergleichen Glieder eine neue Progression geben, wie zum Beyspiel aus der Reihe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ꝛc. die Glieder 1, 4, 7, 10, 13, 16.

Der 4. Zusatz.

§. 199. Wenn zwey Glieder einer Reihe bekannt sind, welche es auch seyn mögen, und man weiß zugleich die Anzahl der Glieder, welche zwischen denselben stehen, so ist die gantze Reihe gegeben. Man nehme die Reihe A, B, C, D, E, F etc. in welcher man setzet, daß die Glieder, so wie sie sich von A entfernen, beständig wachsen: und es sey A und F nebst der Anzahl der Glieder zwischen A und F gegeben, welche sey $= 4$; so ist $B - A = \frac{F - A}{5}$ (§. 197.). Folglich ist $B - A$ bekannt, und wenn diese Differenz zweyer zunächst auf einander folgen=

folgenden Glieder, zu dem Gliede A addiret wird, so erhält man das zweyte Glied B, aus diesem das dritte C, und so die übrigen.

Der 5. Zusatz.

§. 200. Auf diese Art kan man zwischen jegliche zwey Glieder einer arithmetischen Reihe andre setzen, welche mit den ersteren zusammengenommen, eine neue arithmetische Reihe geben. Wenn in der steigenden Progression A, B, C etc. welche wir angenommen haben, zwischen zwey Glieder A, B ein neues zu setzen ist; so wird die Differenz desselben von A diese seyn $\frac{B - A}{2}$, und wenn man diese zu dem Glied A addiret, wird das verlangte mittlere Glied $= A + \frac{B}{2} - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} + \frac{B}{2}$ oder $\frac{A+B}{2}$, welches die halbe Summe der Glieder A und B ist.

Der 6. Zusatz

§. 201. Hingegen wird eine Geometrische Reihe gegeben, wenn ein Glied derselben, und die Verhältniß dieses Gliedes zu dem nächst folgenden bekannt ist. Denn da diese Verhältniß durch die ganze Reihe einerley bleibt (§. 194.), so kan man ein jedes Glied, welches unmittelbar auf ein gegebenes oder bereits gefundenes folgt, durch die Proportions-Regel finden. Wenn zum Beyspiel die Verhältniß 3 : 5 seyn soll, und es ist das Glied 45 gegeben

gegeben, so ist das nächste $\frac{45 \times 5}{3} = 75$, dasjenige so hierauf folgt ist $\frac{75 \times 5}{3} = 125$ u. s. f. Hingegen wird unmittelbar vor dem Gliede 45 in der Reihe stehen $\frac{45 \times 3}{5} = 27$, vor diesem, das Glied $\frac{27 \times 3}{5} = \frac{81}{5}$ und vor diesem ferner die Glieder $\frac{243}{25}$, $\frac{729}{125}$, $\frac{2187}{625}$, ꝛc.

Der 7. Zusatz.

§. 202. Wenn A, B, C, D, E, F ein Theil einer geometrischen Reihe ist, welche auf beiden Seiten ohne Ende fortgesetzt werden kan; so ist die Verhältniß A : C zweymahl so hoch, als die Verhältniß A : B, die Verhältniß A : D ist dreymahl so hoch, als die Verhältniß A : B; die Verhältniß A : E ist viermahl so hoch, u. s. f. (§. 158.) So ist auch die Verhältniß F : D zweymahl so hoch, als die Verhältniß F : E oder B : A, die Verhältniß F : C ist dreymahl so hoch; F : B viermahl so hoch; F : A fünfmahl so hoch, und so ferner.

Der 8. Zusatz.

§. 203. Weil nun die Verhältnisse, welche dreymahl, viermahl, oder mehrmahl so hoch sind, als eine gegebene Verhältniß, unter sich gleich sind, so werden auch, wenn man aus einer geometrischen Reihe verschiedene

dene Glieder zieht, welche in derselben gleich weit von einander stehen, diese Glieder eine neue geometrische Reihe geben. Wenn man aus der Progression $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16, 32, das erste, dritte, fünfte Glied ꝛc. zieht, so entsteht eine neue Progrsssion $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}$, 2, 8, 32, ꝛc.

Der 9. Zusatz.

§. 204. So bald in einer geometrischen Reihe zwey Glieder gegeben sind, und die Anzahl der Glieder, welche zwischen denselben stehen, bekannt ist, wird die Reihe bestimmt; und kan von einem jeden gefunden werden, der aus den zweymahl, dreymahl, viermahl, oder mehrmahl so hohen Verhältnissen, die einfachen Verhältnisse, aus deren Zusammensetzung jene entstanden sind, oder die halb so hohen Verhältnisse u. s f. zu finden weiß. Eben derselbe wird auch in einer gegebenen geometrischen Reihe, zwischen jegliche zwo Glieder, so viele neue Glieder, als verlangt werden, einzuschieben im Stande seyn.

Der 10. Zusatz.

§. 205. Wenn aber in einer Reihe zwischen jegliche zwey Glieder nur ein einziges eingeschoben werden soll, so geschieht dieses sehr leicht, indem hiezu weiter nichts erfordert wird, als daß man zwischen diesen zwey Gliedern die mittlere Proportionalzahl finde (§. 182.). Auf diese Art wird man in die Reihe $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{2}$, 2, 8, 32, neue Glieder einschieben, wenn man zwischen $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{2}$ das Glied $\frac{1}{4}$ setzet, welches die mittlere Proportionalzahl zwischen $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{2}$ ist, zwischen $\frac{1}{2}$ und 2 aber das Glied 1, die mittlere Proportionalzahl zwischen diesen beyden; und so ferner: es wäre denn, daß, nachdem die Verhältniß des vorhergehendes Gliedes zu dem nachfolgenden in der neuen Reihe, welche Verhältniß hier 1 : 2 ist, durch das zuerst gefundene Glied $\frac{1}{4}$ und das vorhergehende $\frac{1}{8}$, oder das folgende $\frac{1}{2}$ gegeben worden, man lieber die Reihe von diesem Gliede an, nach der gefundenen Verhältniß fortsetzen wolte.

Erklärung.

§. 206. Wenn man annimmt daß die Verhältniß A : B aus einer andern a : b entstanden sey, indem man diese zweymal oder dreymal so hoch gemacht, oder zu einer jeden andern Höhe erhoben hat, so heißt die Zahl welche die Höhe der Verhältniß A : B in Ansehung der a : b anzeigt, der Logarithme der Verhältniß A : B. Wenn also zum Beyspiel A : B zweymal so hoch ist als die Verhältniß a : b so ist der Logarithme der Verhältniß A : B die Zahl 2. Ist A : B fünfmal so hoch als die Verhältniß a : b, so ist der Logarithme der Verhältniß A : B die Zahl 5, und so bey den übrigen.

§. 207. Ist aber in der Verhältniß A : B, welche auf die eben beschriebene Weise aus der Verhältniß a : b entstanden ist, A eine Zahl, B hin-

B hingegen die Einheit, so wird in diesem Fall der Logarithme der Verhältniß A : B auch der Logarithme der Zahl A genennt.

Der 1. Zusatz.

§. 208. Wenn man daher in einer geometrischen Reihe

A : B : C : D : E : F

die Verhältniß eines jeglichen Gliedes zu dem nächstfolgenden A : B, D : E oder E : F als einfach betrachtet, so wird der Logarithme der Verhältniß eines jeden vorhergehenden Gliedes A zu dem folgenden C, welches das zweyte von diesem ist, die Zahl 2 seyn; der Logarithme der Verhältniß eben dieses Gliedes A, zu dem Gliede D, welches das dritte von A ist, wird die Zahl 3 seyn, und so ferner §. 202.) Betrachtet man hingegen die Verhältniß eines der nachfolgenden Glieder F zu dem nächst vorhergehenden E, so ist zwar dieselbe ebenfalls einfach, folglich der Logarithme derselben die Einheit, allein diese ist nunmehr negativ zu nehmen, weil man hier in verkehrter Ordnung zehlen muß; und es wird also auch der Logarithme der Verhältniß F : D die Zahl − 2, der Logarithme von F : C, − 3, und so beständig (§. 42). Ueberhaupt ist der Logarithme einer jeglichen Verhältniß A : F mit dem Logarithmen der umgekehrten Verhältniß F : A einerley, und es sind beide in der jetzt betrachteten Reihe = 5; nimmt man aber vor den Logarithmen der Verhältniß A : F, + 5 an, so wird der Logarithme der Verhältniß F:A, —5, und umgekehrt.

Der 2. Zusatz.

§. 209. Wenn man aber in einer wachsenden geometrischen Reihe, die von der Einheit anfängt, neben ein jedes Glied eine Zahl schreibt, wie in der nachstehenden Tafel geschehen ist,

1	0	128	7	16384	14
2	1	256	8	32768	15
4	2	512	9	65536	16
8	3	1024	10	131072	17
16	4	2048	11	262144	18
32	5	4096	12	524288	19
64	6	8192	13	1048576	20

und man nimmt die Verhältniß eines jeden Gliedes der geometrischen Reihe zu dem unmittelbar vorhergehenden als einfach an; so ist die Zahl, welche neben einem jeglichen Gliede geschrieben ist, der Logarithme desselben Gliedes (§. 207.), weil sie der Logarithme der Verhältniß eben dieses Gliedes zu der Einheit ist. So wird der Logarithme des Gliedes 2 in der Reihe, 1 seyn, der Logarithme des Gliedes 32 ist 5, und der Logarithme des Gliedes 524288 ist 19.

Der 3. Zusatz.

§. 210. Was aber den Logarithmen der Verhältniß eines jeden der nachfolgenden Glieder einer

solchen

solchen Reihe, zu einem jeden der vorhergehenden betrift, so findet man denselben, wenn man den Logarithmen des kleinern Gliedes, welches in der Reihe voransteht, von dem Logarithmen des grössern Gliedes, welches in der Reihe folget, abzieht. Wenn also l den Logarithmen bezeichnet, und es ist M das grössere Glied der Reihe, N hingegen das kleinere, so ist allzeit $l(M : N) = l M - l N$.

Der 4. Zusatz.

§. 211. Da nun der Logarithme der Verhältniß $N : M$, welche die umgekehrte der vorigen ist, sich von dem Logarithmen der Verhältniß $M : N$ in nichts unterscheidet, ausser daß er negativ genommen werden muß (§. 208.), so wird man auch den Logarithmen der Verhältniß $N : M$ herausbringen, wenn man den Logarithmen des Gliedes M, welches in der Verhältniß das nachfolgende ist, mit dem Logarithmen des Gliedes N, durch das Zeichen $-$ verknüpfet: so daß $l(N : M) = l N - l M$.

Der 5. Zusatz.

§. 212. Aus dem, was dergestalt gewiesen worden ist, folgt, daß bey einer jeden Verhältniß $A : B$, überhaupt seyn werde $l(A : B) = lA - lB$. Nun ist aber $A : B = \frac{A}{B} : 1$ (§. 164.), und es ist der Logarithme der Verhältniß $\frac{A}{B} : 1$ zugleich

 der

der Logarithme des Bruchs $\frac{A}{B}$ (§. 207.). Folglich erhält man den Logarithmen eines Bruchs, wenn man mit dem Logarithmen des Zehlers l A, den Logarithmen des Nenners l B durch das Zeichen — verbindet, folgendergestalt l A — l B: und es wird dieser Logarithme positiv seyn, wenn A grösser ist als B, das heißt, wenn $\frac{A}{B}$ ein unächter Bruch ist, hingegen wird der Logarithme negativ seyn, wenn A kleiner als B, folglich $\frac{A}{B}$ ein ächter Bruch ist. Auch ist überhaupt $l\frac{A}{B} = -l\frac{B}{A}$.

Anmerckungen.

§. 213. Wenn man die geometrische Reihe verändert, und anstatt der zuerst angenommenen eine gantz andre setzt, so bekommen einerley Verhältnisse verschiedne Logarithmen: und es können also unendlich viele Logarithmische Systeme gemacht werden. So wenn man anstatt 1 : 2, die Verhältniß 1 : 4 als einfach betrachtet, wodurch die Reihe folgendermaßen fortläuft 1, 4, 16, 64, 256, so ist der Logarithme von 256, welcher in dem bisher gebrauchten System 8 war, ietzo nur 4; und überhaupt sind die Logarithmen des vorigen Systems doppelt so groß als die Logarithmen des neuen Systems, welche zu eben denselben Zahlen gehören.

§. 214.

§. 214. Die Logarithmen des Briggs deren wir uns fast allein bedienen, sind aus einer geometrischen Reihe genommen, in welcher von der Einheit bis zu Zehen, 10000000 Glieder stehen; folglich sind eben so viele Glieder zwischen 10 und 100, zwischen 100 und 1000 u. s. f. und es ist der Logarithme der Zahl 10 dieser 10000000, der Logarithme der Zahl 100 ist 20000000, der Logarithme der Zahl 1000 ist 30000000, und so ferner. Dieses kan aber kürtzer ausgedrückt werden, wenn man sagt, es sey 1 der Logarithme der Zahl 10, es sey 2 der Logarithme der Zahl 100, und 3 der Logarithme der Zahl 1000 u. s. f. wodurch die Logarithmen der Zahlen in einer Reihe, deren jedes folgende Glied zehnmal so groß ist als das nächst vorhergehende 1, 10, 100, 1000, 10000, die gantzen Zahlen werden, welche in der natürlichen Ordnung auf einander folgen, 0, 1, 2, 3, 4; und der Logarithme so viele Einheiten enthält, als die Zahl, zu der er gehöret, Nullen hat: die Logarithmen aber von denjenigen Zahlen, welche zwischen den hier angezeigten stehen, werden zehntheilige Brüche. Diejenigen welche zu den Zahlen zwischen 1 und 10 gehören, sind alle kleiner als die Einheit; diejenigen, welche zu den Zahlen zwischen 10 und 100 gehören, sind alle grösser als die Einheit, aber kleiner als die Zahl 2; die zu den Zahlen zwischen 100 und 1000 gehören sind grösser als 2 aber kleiner als 3: so daß überhaupt die Anzahl der gantzen Einheiten in dem Logarithmen um Eins kleiner ist als

als die Anzahl der Zifern, die in der Zahl, zu welcher der Logarithme gehöret, gantze Einheiten bedeuten.

§. 215. Man pflegt aber diese Zahl der gantzen Einheiten welche in dem Logarithmen sind, die Kennzifer des Logarithmen zu nennen (nota characteristica). Diese ist also allzeit gegeben, sobald die Zahl gegeben ist: und wenn die Zifern einer Zahl, und die Kennzifer ihres Logarithmen gegeben ist, so weis man die Stelle der einzelnen Einheiten in der Zahl, welche man mit dem Comma bezeichnen muß (§. 22.).

§. 216. Das Logarithmische System von welchem wir ietzt reden, ist aus der Reihe 1, 10, 100, 1000 nach Maaßgebung desjenigen verfertiget worden, was oben (§. 200. 204.) gezeigt worden ist; man hat aber bey der Rechnung kein einziges Mittel versäumet, welches sich darbot, um dieselbe zu erleichtern. Indessen kan das folgende von dieser Berechnung einen Begrif geben.

§. 217. Es seyn die Zahlen zu finden, welche als Glieder einer geometrischen Reihe zwischen 10000 und 100000 einzuschieben sind, und auch die Logarithmen, die zu diesen Zahlen gehören. So suche man die mittlere Proportionalzahl zwischen diesen Gliedern, welche nichts anders seyn wird als die Quadratwurtzel der Zahl 1000000000, $= 31622$; und der zu derselben gehörige Logarithme ist die mittlere Zahl zwischen 4 und 5, als Glieder einer arithmetischen Reihe betrachtet, folglich $\frac{4+5}{2} = 4,5$ (§. 200.).

§. 218. Man benenne von den beiden äusersten Gliedern der geometrischen Reihe, das erste 10000 mit dem Buchstaben A, und das letzte 100000 mit B, das eben gefundene mittlere Glied aber mit C. Wenn man also nunmehr die angefangene Arbeit fortsetzen will, so finde man die mittlere Proportionalzahl zwischen A und C, indem man aus der Zahl 316220000 die Quadratwurtzel ziehet; diese sey D = 17783, und man schreibe neben derselben ihren Logarithme, welcher in der arithmetischen Reihe zwischen den Gliedern 4 und 4, 5 in der Mitte stehet, und 4, 25 ist. Hierauf nehme man ferner die mittlere Proportionalzahl E, zwischen C und B, indem man aus der Zahl 3162200000 die Quadratwurtzel zieht, welche 56233 ist, und der zu derselben gehörige Logarithme ist die mittlere arithmetische Zahl zwischen 4, 5 und 5 oder 4, 75. Eben so finde man zwischen A und D die mittlere Proportionalzahl F = 13335, zwischen D und C die mittlere Proportionalzahl G = 23713, zwischen C und E die mittlere Proportionalzahl H = 42169, und endlich zwischen E und B die mittlere Proportionalzahl I = 74988.

§. 219. Dieses wird zu einem Beyspiel hinlänglich seyn. Derjenige welcher eine Logarithmen-Tafel verfertigen wollte, müßte auf diese Art die Ausziehung der Quadratwurtzeln so lange fortsetzen, bis er eine geometrische Reihe erhalten hätte, in welcher ein jedes Glied dem unmittelbar auf dasselbe folgenden beynahe gleich wäre, indem nehmlich der Unterschied dieser Glieder, wegen der großen Menge derselben, gar sehr gering würde.

§. 220. Hat man aber eine Classe von Logarithmen nach dieser Methode verfertiget, so ist es sehr leicht die vorhergehenden Classen hinzuzufügen. Da zum Beyspiel die Classe der Zahlen von 10000 bis 100000, so weit wir sie gerechnet haben, folgendergestalt aussieht:

Zahl	Logar.	Zahl	Logar.	Zahl	Logar.
10000	4,000	23713	4,375	56233	4,750
13335	4,125	31622	4,500	74988	4,875
17783	4,250	42169	4,625	100000	5,000

so wird die vorhergehende Classe, in welcher die Zahlen von 1000 bis 10000 stehen, diese seyn.

Zahl	Logar	Zahl	Logar.	Zahl	Logar.
1000,0	3,000	2371,3	3,375	5623,3	3,750
1333,5	3,125	3162,2	3,500	7498,8	3,875
1778,3	3,250	4216,9	3,625	10000,0	4,000

welches leicht einzusehen ist, wenn man auf die Zahlen Achtung giebt, deren Quadratwurzeln die Glieder dieser Classe geben. Eben so leicht begreift man, daß die nächst vorhergehende Classe, welche die Zahlen von 100 bis 1000 enthält, die folgende seyn werde,

Zahl	Logar	Zahl	Logar.	Zahl	Logar.
100,00	2,000	237,13	2,375	562,33	2,750
133,35	2,125	316,22	2,500	749,88	2,875
177,83	2,250	421,69	2,625	1000,00	3,000

und daß aus dieser ferner die vorhergehenden Classen entstehen, wenn man in den Zahlen, das Zeichen der Stelle der einzelnen Einheiten um einen oder mehrere Plätze nach der lincken Seite fortschiebt; bey den Logarithmen aber, die Kennzifer um eben so viele gantze Einheiten kleiner macht, als viele Plätze jenes Zeichen fortgerückt ist.

§. 221. Man kan sich vorstellen, daß auf diese Art eine Logarithmen-Tafel zusammengesetzt worden sey; aus welcher man nachher nur diejenigen Glieder nebst ihren Logarithmen gezogen, und durch den Druck gemeinnützig gemacht hat, welche den gantzen Zahlen am nächsten kommen. Dieses ist die Ursache, warum in diesen Zahlen kaum einige Spur einer geometrischen Progression, so wenig als in den Logarithmen die Spur einer arithmetischen Reihe entdeckt wird.

§. 222 Es wäre hinlänglich gewesen, wenn man eine eintzige von den höheren Classen herausgegeben hätte, diejenige zum Beyspiel, welche die Logarithmen der Zahlen von 10000 zu 100000 enthält, weil aus den Logarithmen dieser Classe die Logarithmen der niedrigern Classen sehr leicht zu machen sind. So, wenn der Logarithme der Zahl 35682 dieser ist, 4,5524492; wird der Logarithme der Zahl 356,82 folgender seyn 2,5524492; der Logarithme von 3,5682 ist 0,5524492, und der Logarithme des zehntheiligen Bruchs 0,0035682 dieser — 3,5524492, bey welchem aber das Zeichen — nur die Kennzifer allein, und nicht die folgenden Zahlen angeht, so daß dieser Logarithme gelesen werden muß, als wenn er nachfolgendermassen geschrieben wäre $-3+0,5524492$.

§. 223. Da wir aber hier solche Logarithmen beyfügen wolten, welche den Anfängern zur Uebung dienen könten, so haben wir aus andern Ursachen die gantzen Zahlen der ersten drey Classen erwehlet, und dieselben nebst ihren Logarithmen hier einrücken lassen, welche letzteren aber etwas zusammengezogen sind. Man findet auch andre Zahlen in dieser Tafel, welche zu den Cirkeln gehören; der Gebrauch derselben wird in dem folgenden gezeigt werden. Inzwischen werden wir uns in den nachfolgenden Exempeln der vollständigern Logarithmen-Tafeln bedienen.

§. 224. Man kan aber aus einer Logarithmen-Tafel, es mag nun in derselben die Kennzifer ausgedrückt seyn oder nicht, den Logarithmen einer gegebenen gantzen Zahl oder eines zehntheiligen Bruchs; wie auch die zu einem gegebenen Logarithmen gehörige gantze, oder nach Art der gantzen Zahlen durch zehntheilige Brüche ausgedrückte Zahl, nachfolgendermassen finden.

§. 225. Es sey der Logarithme einer Zahl zu schaffen, welche durch folgende Zifern ausgedrückt wird 79428, was vor Ordnungen von Einheiten auch diese Zifern andeuten mögen. So nehme man aus der höchsten Classe der Logarithmen den Theil des zu dieser Zahl gehörigen Logarithmen, welcher auf die Kennzifer folgt, ohne auf die Kennzifer selbst, wenn dieselbe gleich in den Tafeln stehen solte, Achtung

tung zu geben. Dieser Theil des Logarithmen ist, 8999736. Will man nun die zu demselben gehörige Kennzifer in einem jeden Falle richtig setzen, so gebe man derselben so viele Einheiten, als viele Stellen sind, um welche das Zeichen (,) in der Zahl, nach der Rechten oder Lincken fortgerückt werden muß, wenn die Zifer derselben, welche die Einheiten von der höchsten Ordnung zehlet, nun einzelne Einheiten ausdrücken soll, so, daß wenn dieses Zeichen nach der lincken Seite fortgerückt wird, die Kennzifer positiv, hingegen nach der rechten Seite, negativ wird. Wenn nach dieser Regel die Zahl folgende ist 79428, so ist der Logarithme 4,8999736 weil man das Zeichen (,) um vier Stellen nach der lincken Seite fortschieben muß, damit die Zifer 7, einzelne Einheiten bedeute; ist die Zahl 794, 28 so ist der Logarithme 2, 8999736; und endlich bey der Zahl 0, 0079428, wird der Logarithme —3, 8999736, welches Zeichen — aber, wie (§. 222.) gesagt worden ist, nur die Kennzifer allein angeht.

§. 226. Ist hingegen der Logarithme gegeben, so nimmt man die zu demselben gehörige Zahl aus den Tafeln, ohne anfangs auf die Kennzifer Achtung zu geben; und schreibt bloß die Zifern auf, welche in der Tafel neben dem Logarithmen stehen. Hierauf aber setzt man das Zeichen der einzelnen Einheiten an diejenige Stelle, welche die Kennzifer des gegebenen Logarithmen anzeigt. Es steht neben dem Logarithmen 3, 8999736 in den Tafeln eine durch folgende Zifern ausgedrückte Zahl 79428;

wenn

wenn aber die Kennzifer des Logarithmen die ist, welcher hier geschrieben worden, nehmlich 3, so ist die Zahl 7942,8. Wäre aber 5 die Kennzifer, so gehörte zu dem Logarithmen die Zahl 794280, und bey der Kennzifer —1, wäre die Zahl 0,79428.

Aufgabe.

§. 227. Wenn eine Logarithmen-Tafel, und aus derselben die Logarithmen dreyer Zahlen gegeben sind, den Logarithmen der vierten Proportional-Zahl zu finden.

Auflösung.

Es seyn die gegebenen Logarithmen der Zahlen A, B, C diese: lA, lB, lC, und es sey der Logarithme der vierten Zahl D zu finden, welche sich zu C verhalte wie B zu A, so daß $A : B = C : D$; so mache man den $lD = lC + lB - lA$, und es wird dieses der gesuchte Logarithme seyn.

Beweis.

Denn es ist der Logarithme der Verhältniß $B : A$ dieser $lB - lA$, und der Logarithme der Verhältniß $D : C$ ist $lD - lC$ (§. 212.). Da nun diese Verhältnisse gleich sind, so ist auch $lD - lC = lB - lA$, folglich wenn man zu beiden Seiten lC addiret, $lD - lC + lC = lC + lB - lA$, oder, $lD = lC + lB - lA$.

Exem-

Exempel.

§. 228. Es sey $A = 17$, $B = 597$, $C = 83$, so ist

$$lA = 1,2304489$$
$$lB = 2,7759743$$
$$lC = 1,9190781$$
$$lC + lB = 4,6950524$$
$$lC + lB - lA = 3,4646035 = lD.$$

Zu diesem gehöret die Zahl $2914,7 = D$.

Wenn man annimmt $A = 1,7$, $B = 59,7$ $C = 0,083$ so wird

$$lA = 0,2304489$$
$$lB = 1,7759743$$
$$lC = -2,9190781$$

Folglich $lC + lB = 0,6950524$

Und $lC + lB - lA = 0,4646035 = lD$

Zu welchem gehöret die Zahl $D = 2,9147$.

Nimmt man aber $A = 170$ $B = 59,7$ und $C = 0,83$ so ist

$$lA = 2,2304489$$
$$lB = 1,7759743$$
$$lC = -1,9190781$$

Also $lC + lB = 1,6950524$

Und $lC + lB - lA = -1,4646035 = lD$

und hiezu gehöret die Zahl $D = 0,29147$.

Der

Der 1. Zusatz.

§. 229. Weil also der Logarithme der Einheit 0 ist, so ist der Logarithme eines Products die Summe der Logarithmen welche zu den Factoren gehören; wie im Gegentheil der Logarithme des Quotienten übrig bleibt, wenn man den Logarithmen des Divisors von dem Logarithmen des Dividendus abzieht (§. 212.). Daher denn überhaupt die Producte, welche durch die Multiplication verschiedener Zahlen in einander entstehen, oder die Quotienten, welche durch die Division dieser Producte durch andre Zahlen herauskommen, mit Hülfe der Logarithmen sehr leicht gefunden werden.

Exempel.

§. 230. Es sey $A = 3524$, $B = 596,3$ $C = 24,38$, $D = 913$, $E = 85,74$, und man nenne den Quotienten welcher herauskommt, wenn das Product $A \times B \times C$ durch $D \times E$ dividiret wird, Q; so ist

$$
\begin{array}{r}
lA = 3,5470359\\
lB = 2,7754648\\
lC = 1,3870337\\ \hline
\left.\begin{array}{r}
l(A \times B \times C) = 7,7095344\\
lD = 2,9604708\\
lE = 1,9331835\\ \hline
(lD \times E) = 4,8936543
\end{array}\right\} \text{subtrah.}\\ \hline
lQ = 2,8158801
\end{array}
$$

; zu diesem Logarithme gehöret die Zahl $Q = 654,4554$.

Der 2. Zusatz.

§. 231. Weil der Logarithme des Quadrats entsteht, wenn man den Logarithmen der Wurtzel zu sich selbst addiret, so ist er zweymal so groß als der Logarithme der Wurtzel; der Logarithme der Würfelzahl ist dreymal so groß; der Logarithme der vierten Potenz ist viermal so groß, und so beständig.

Der 3. Zusatz.

§. 232. Und es ist auf der andern Seite der Logarithme der Quadratwurtzel einer jeglichen Zahl N der Helfte des Logarithmen der Zahl selbst, gleich; der Logarithme der Cubic-Wurtzel ist der dritte Theil des Logarithmen der Zahl, der Logarithme der vierten Potenz ist der vierte Theil, und so ferner. Folglich wird die Ausziehung der Wurtzeln von allen Potentzen durch die Logarithmen gar leicht verrichtet, wenn nur die Anzahl der Zifern, welche in der gesuchten Wurtzel sind, oder welche man in derselben verlangt, im Fall sie nicht gantz genau geschaft werden kan, nicht grösser ist, als die Anzahl der Zifern in der größten von den Zahlen, zu denen die Tafeln der Logarithmen eingerichtet sind.

1. Exempel.

§. 233. Der Logarithme der Zahl 57932 ist dieser 4,7629185, folglich ist der Logarithme der Quadratwurtzel derselben Zahl, 2,3814592, und die Quadratwurtzel selbst 240,6907. Der Logarithme der Cubicwurtzel eben dieser Zahl ist

1,5876395

1,5876395, und die Cubicwurtzel selbst 38,69364. Der Logarithme der vierten Wurtzel der nehmlichen Zahl ist 1,1907296 und die vierte Wurtzel selbst, 15,51421.

2. Exempel.

§. 234. Der Logarithme der Zahl 0,57932 ist —1,7629185, in welchem sich das Zeichen — bloß auf die Kennzifer beziehet (§. 222.). Wenn man nun die Helfte dieses Logarithmen nehmen solte, um den Logarithmen der Quadratwurtzel der gegebenen Zahl 0, 57932 zu erhalten, so müßte die Helfte der negativen Kennzifer besonders genommen werden, welches aber nicht angeht, weil die Kennzifern allzeit gantze Zahlen seyn müssen. Man schreibe also an statt der Kennzifer — 1, diese — 2 + 1, welches mit dem vorigen einerley ist, und nehme von dem auf diese Art geschriebenen Logarithmen — 2 + 1, 7629185 die Helfte — 1,8814592, so wird die neben diesem Logarithmen in den Tafeln stehende Zahl die verlangte Quadratwurtzel der Zahl 0,57932 seyn. Soll aus eben dieser Zahl die Cubic-Wurtzel gezogen werden, so setze man anstatt der Kennzifer — 1 diese —3+2, und nehme nunmehr von dem solchergestalt geschriebenen Logarithmen —3+2,762918 den dritten Theil —1,9209728, welches der Logarithme der verlangten Cubicwurtzel ist. Eben dieses hat man in ähnlichen Fällen auch bey den Wurtzeln der höhern Potenzen zu beobachten.

§. 235.

Anmerckungen zu der Tafel.

§. 235. Man hat den hier folgenden Tafeln noch die Differenzen der Logarithmen beygefüget, das ist, es stehet neben einem jeden Logarithmen dasjenige, was ihm zugesetzt werden muß, wenn der nächstfolgende herauskommen soll. Hiedurch wird der Gebrauch dieser Tafeln sehr erweitert, deren man sich ausserdem, nur allein bey den Zahlen zwischen 1 und 1000 würden bedienen können. Es bleiben nehmlich diese Differenzen einerley, wenn man gleich die beiden Zahlen, zu welchen die Logarithmen gehören, 10, 100, 1000 mahl grösser oder kleiner macht; indem durch eine dergleichen Vergrösserung oder Verkleinerung, niemals in den eigentlichen Logarithmen, sondern bloß in der Kennziffer derselben eine Veränderung vorgeht (§. 220 u. f.).

§. 236. Betrachtet man aber diese Differenzen genauer, so sieht man, daß indem die Zahlen nach und nach um 1, 2, 3, anwachsen, die Differenzen ihrer Logarithmen zwar abnehmen, aber so wenig, daß zum Beyspiel die Differenz der Logarithmen, welchen zu den Zahlen 101 und 102 gehören, kaum grösser ist, als die Differenz der Logarithmen von den Zahlen 102 und 103. Hieraus folgt, daß wenn die Zahlen nicht um 1, sondern um 2 unterschieden sind, wie zum Beyspiel 101 und 103, die Differenz ihrer Logarithmen, ohne sonderlichen Fehler, doppelt so groß seyn müsse, als sie vorher war; und daß, wenn der Unterschied der Zahlen drey ist, man die Differenz der Logarithmen, ohne einen beträchtlichen Fehler, vor dreymahl so groß annehmen könne, u. s. f. welcher Fehler um desto kleiner wird, je näher die Zahlen bey einander stehen, oder je kleiner die Differenz derselben ist, so daß, wenn man zwo nicht weit von einander entfernte Zahlen annimmt, und zwo andre, deren Unterschied von den vorigen, und unter einander, ebenfalls nicht groß ist, man mit einem sehr kleinen Fehler sagen kan, die Differenz der ersten zwo Zahlen, verhalte sich zu der Differenz der andern zwo Zahlen, wie die Differenz der Logarithmen der ersteren zwo Zahlen, zu der Differenz der Logarithmen der letzteren zwo Zahlen. Dieses ist der Grund auf welchen man bauet, wenn man die zu einem gegebenen Logarithmen gehörige Zahl näher haben will, als sie die Tafel geben kan, oder wenn man zu einer gegebenen Zahl den Logarithmen genauer verlangt, als man ihn unmittelbar in der Tafel findet

§. 237. Es sey eine Zahl n und ihr Logarithme l,
eine andre Zahl N und ihr Logarithme L,
eine dritte Zahl n + v und ihr Logarithme l + d.

Es sey aber N etwas grösser als n, und n + v wieder etwas grösser als N, so wird die Differenz der ersten zwo Zahlen N — n, und die Differenz der ersten und dritten v seyn. Eben so ist auch die Differenz der zu der ersten und zwoten Zahl gehörigen Logarithmen L — l, und die Differenz der Logarithmen, die zu der ersten und dritten Zahl gehören, ist d.

Hieraus

Hieraus aber entsteht die Proportion

$$N - n : v = L - l : d,$$

und durch Versetzung der Glieder diese andre:

$$v : N - n = d : L - l.$$

Aus der ersten von diesen Proportionen findet man

$$N - n = \frac{L - l}{d} . v; \text{ und } N = \frac{L - l}{d} . v + n.$$

Aus der andern aber ist

$$L - l = \frac{N - n}{v} . d; \text{ und } L = \frac{N - n}{v} . d + l;$$

und diese beide For[illegible]zeigen, wie in einem jeden Falle die Rechnung ei[illegible]zurichten sey.

§. 238. Es sey zuerst L ein gegebener Logarithme, welcher in den Tafeln nicht genau stehet; es sey aber der Logarithme der Tafel l unmittelbar kleiner als L, und der Logarithme in der Tafel $l + d$ sey unmittelbar grösser; so ist d die Differenz der beiden Logarithmen $l + d$ und l, welche man nun aus der Tafel unmittelbar nehmen kan. Es ist aber auch die Zahl n sowohl, als die nächste grössere Zahl $n + v$ bekannt, deren erste zu dem Logarithmen l, die zwote hingegen zu dem Logarithmen $l + d$ gehöret, und v ist 1 oder 10, oder 100 ꝛc, oder 0,1; 0,01; 0,001 ꝛc. Man kan also nach der ersten von den gegebenen Formeln $N = \frac{L - l}{d} . v + n$ die Rechnung einrichten, und die zu dem gegebenen Logarithmen L gehörige Zahl N leicht herausbringen.

Ist aber N gegeben, und man will den Logarithmen L genauer haben, als ihn die Tafel giebt, so nehme man den Logarithmen l der nächsten kleinern Zahl n, und die Differenz dieses Logarithmen und des folgenden, d, welches alles man in der Tafel findet. Alsdenn wird nach der zwoten Formel $\frac{N-n}{v}.\,d+l$ der verlangte Logarithme L eben so leicht gefunden.

§. 239. Da aber alles, was hier vorausgesetzt wird, nicht gantz genau, sondern mit einem kleinen Fehler richtig ist, so ist es nicht nöthig, sehr genau zu rechnen, und es ist genung, wenn man zu der Zahl N zwo Zifern findet, weil die dritte meistentheils, und die folgenden fast allzeit zu starck fehlen. Was aber die Logarithmen anlangt, so ist es unnütz, sie in mehrerern Zifern zu suchen, als die übrigen Logarithmen in der Tafel haben, deren man sich bedienet. Denn da alle diese Logarithmen um so viel fehlen, als die am Ende weggelassenen Zifern betragen, so können auch diejenigen Zifern, welche man an die Stelle dieser letzteren, durch die Rechnung, wovon hier die Rede ist, heraus bringt, nicht richtig seyn. Uebrigens kan man sich derer Differenzen auf die hier angezeigte Art, auch bey allen andern Tafeln bedienen, wenn nur dasjenige, was §. 236 zum Grunde gelegt worden ist, bey denselben zutrifft, welches meistentheils geschiehet.

1. Exempel.

§. 240. Es sey die Zahl zu finden, die zu dem Logarithmen —1,46460 gehöret, welcher nicht in der Tafel steht, so bedeutet L diesen Logarithmen, und N die gesuchte Zahl. Es ist aber der nächste kleinere Logarithme in der Tafel $l = -1,46389$ und $d = 0,00149$; und es gehöret zu dem Logarithmen l die Zahl $n = 0,291$. Weil nun die nächste Zahl der Tafel, zu welcher der Logarithme $l + d$ gehöret $0,292$ ist, so ist hier $v = 0,001$. Hieraus wird, wenn man nach der ersten Formel (§. 238.) rechnet

$$L - l = 0,00071 \text{ und}$$

$$\frac{L - l}{d} . v = 0,000476$$

welches, wenn man die Zahl $n = 0,291$ hinzusetzet, giebt $N = 0,291476$.

2. Exempel.

§. 241. Man soll den Logarithmen der Zahl 3524 schaffen. Diese ist also N, und ihr gesuchter Logarithme $= L$. Es steht in der Tafel bey der Zahl 352, der Logarithme 2,54654, folglich ist der Logarithme der Zahl $3520 = n$ dieser $3,54654 = l$, und $d = 0,00123$; weil aber die Zahl, welche zu dem Logarithmen $l + d$ gehöret, 3530 ist, so ist hier $v = 10$. Hieraus erhält man nach der zwoten Formel (§. 238.)

$$N - n = 4, \text{ und}$$

$$\frac{N - n}{v} . d = 0,00049,$$

also, wenn man hiezu noch addiret $l = 3,54654$, den gesuchten Logarithmen $L = 3,54703$.

3. Exempel.

§. 242. Es wird zu der Zahl $N = 596,3$ der Logarithme L gesucht; so ist aus der Tafel zu $n = 596$

 $l = 2'$

$l = 2{,}77524$, und $d = 0{,}00073$; zu $l + d$ aber gehört die Zahl 597, also ist hier $v = 1$. Folglich ist abermals nach der zwoten Formul $N - n = 0{,}3$ und

$$\frac{N - n}{v} . d = 0{,}000219,$$

welches, wenn man addiret $l = 2{,}77524$ vor den gesuchten Logarithmen L beynahe giebt 2,77546.

4. Exempel.

§. 243. Man verlangt zu der Zahl $N = 24{,}38$ den Logarithmen L; so ist aus der Tafel zu $n = 24{,}3$ der Logarithme $l = 1{,}38560$ und $d = 0{,}00179$. Es gehört aber zu $l + d$ die Zahl 24,4, also ist $v = 0{,}1$. Folglich nach der eben gebrauchten Formel

$$N - n = 0{,}08 \text{ und}$$

$$\frac{N - n}{v} . d = 0{,}001432, \text{ also}$$

$$L = 1{,}38703.$$

5. Exempel.

§. 244. Man sucht die Zahl N welche zu dem Logarithmen $L = 2{,}81588$ gehöret. In der Tafel steht bey dem nächsten kleinern Logarithmen $l = 2{,}81557$ die Zahl $n = 654$, und $d = 0{,}00067$; und weil die zu $l + d$ gehörige Zahl 655 ist, so ist hier $v = 1$. Hieraus wird nach der zwoten Formel

$$L - l = 0{,}00031, \text{ und}$$

$$\frac{L - l}{d} v = 0{,}462,$$

folglich die gesuchte Zahl $N = 654{,}46$.

Tafel
der
Logarithmen Sinus
und
Tangenten.

Zahl.	Logarith.	Sin.	Tan.	Cot.
1	0,00000	0°, 04	0°, 04	89°, 56
2	0,30103	07	07	53
3	0,47712	10	10	50
4	0,60206	14	14	46
5	0,69897	17	17	43
6	0,77815	21	21	39
7	0,84509	24	24	36
8	0,90309	28	28	32
9	0,95424	31	31	29
10	1,00000	35	35	25
11	1,04139	38	38	22
12	1,07918	41	41	19
13	1,11394	45	45	15
14	1,14613	48	48	12
15	1,17609	52	52	08
16	1,20412	55	55	05
17	1,23045	59	59	01
18	1,25527	1°, 02	1°, 02	88°, 58
19	1,27875	05	05	55
20	1,30103	09	09	51
21	1,32222	12	12	48
22	1,34242	16	16	44
23	1,36173	19	19	41
24	1,38021	23	23	37
25	1,39794	26	26	34
Zahl.	Logarith.	Sin.	Tan.	Cot.

Zahl.	Logarith.	Sin.	Tan.	Cot.
26	1,41497	1°, 30	1°, 30	88°, 30
27	1,43136	33	33	27
28	1,44716	36	36	24
29	1,46239	40	40	20
30	1 47712	43	43	17
31	1,49136	47	47	13
32	1,50515	50	50	10
33	1,51851	54	54	06
34	1,53148	57	57	03
35	1,54407	2°, 01	2°, 01	87°, 59
36	1,55630	04	04	56
37	1,56820	07	07	53
38	1,57978	11	11	49
39	1,59106	14	14	46
40	1,60206	18	18	42
41	1,61278	21	21	39
42	1,62325	24	24	36
43	1,63347	28	28	32
44	1,64345	31	31	29
45	1,65321	35	35	25
46	1,66276	38	38	22
47	1,67209	42	42	18
48	1,68124	45	45	15
49	1,69019	49	48	12
50	1,69897	52	52	08
Zahl.	Logarith.	Sin.	Tan.	Cot.

Zahl.	Logarith.	Sin.	Tan.	Cot.
51	1,70757	56	56	04
52	1,71600	59	59	01
53	1,72427	3°, 02	3°, 02	86°, 58
54	1,73239	06	06	54
55	1,74036	09	09	51
56	1,74818	13	12	48
57	1,75587	16	16	44
58	1,76342	20	19	41
59	1,77085	23	23	37
60	1,77815	27	26	34
61	1,78533	30	30	30
62	1,79239	33	33	27
63	1,79934	36	36	24
64	1,80618	40	40	20
65	1,81291	44	43	17
66	1,81954	47	47	13
67	1,82607	51	50	10
68	1,83250	54	54	06
69	1,83885	58	57	03
70	1,84509	4°, 01	4°, 00	00
71	1,85124	04	04	85°, 56
72	1,85733	08	07	53
73	1,86332	11	11	49
74	1,86923	15	14	46
75	1,87506	18	18	42
Zahl.	Logarith.	Sin.	Tan.	Cot.

Zahl.	Logarith.	Sin.	Tan.	Cot.
76	1,88081	4°, 22	4°, 21	85°, 39
77	1,88649	25	24	36
78	1,89209	29	28	32
79	1,89762	32	31	29
80	1,90309	35	35	25
81	1,90848	39	38	22
82	1,91381	42	41	19
83	1,91907	46	45	15
84	1,92428	49	48	12
85	1,92942	53	52	08
86	1,93449	56	55	05
87	1,93952	5°, 00	58	02
88	1,94448	03	5°, 02	84°, 58
89	1,94939	07	05	55
90	1 95424	10	09	51
91	1,95904	13	12	48
92	1,96378	17	16	44
93	1,96848	20	19	41
94	1,97313	24	22	38
95	1,97772	27	26	34
96	1,98227	31	29	31
97	1,98677	34	33	27
98	1,99122	38	36	24
99	1,99563	41	39	21
100	2,00000	45	43	17
Zahl.	Logarith.	Sin.	Tan.	Cot.

Zahl	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.
101	2,00432	428	5°, 48	5°, 46	84°, 14
102	2,00860	423	51	50	10
103	2,01283	420	55	53	07
104	2,01703	416	58	56	04
105	2,02119	411	6°, 02	6°, 00	00
106	2,02530	408	05	03	83°, 57
107	2,02938	404	09	07	53
108	2,03342	400	12	10	50
109	2,03742	397	16	13	47
110	2,04139	393	19	17	43
111	2,04532	389	23	20	40
112	2,04921	386	26	24	36
113	2,05307	383	29	27	33
114	2,05690	379	33	30	30
115	2,06069	376	36	34	26
116	2,06445	373	40	37	23
117	2,06818	370	43	41	19
118	2,07188	366	47	44	16
119	2,07554	364	50	47	13
120	2,07918	360	54	51	09
121	2,08278	358	57	54	46
122	2,08636	354	7°, 01	58	02
123	2,08990	352	04	7°, 01	82°, 59
124	2,09342	349	08	04	56
125	2,09691	346	11	08	52
Zahl	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.

Zahl.	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.
126	2,10037	343	7°,14	7°,11	82°,49
127	2,10380	341	18	15	45
128	2,10721	338	21	18	42
129	2,11059	335	25	21	39
130	2,11394	333	28	25	35
131	2,11727	330	32	28	32
132	2,12057	328	35	31	29
133	2,12385	325	39	35	25
134	2,12710	323	42	38	22
135	2,130[illegible]3	321	46	41	19
136	2,13354	318	49	45	15
137	2,13672	316	53	48	12
138	2,13988	313	56	52	08
139	2,14301	311	8°,00	55	05
140	2,14612	309	03	58	02
141	2,14921	307	07	8°,02	81°,58
142	2,15228	305	10	05	55
143	2,15533	303	13	08	52
144	2,15836	300	17	12	48
145	2,16136	298	21	15	45
146	2,16435	296	24	19	41
147	2,16731	294	27	22	38
148	2,17026	292	31	25	35
149	2,17318	291	34	29	31
150	2,17609	289	38	32	28
Zahl.	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.

Zahl	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.
151	2,17897	287	8°, 41	8°, 35	81°, 25
152	2,18184	285	45	39	21
153	2,18469	283	48	42	18
154	2,18752	281	52	45	15
155	2,19033	279	55	49	11
156	2,19312	277	59	53	07
157	2,19589	276	9°, 02	56	04
158	2,19865	274	06	59	01
159	2,20139	273	09	9°, 02	80°, 58
160	2,20412	270	13	06	54
161	2,20682	269	16	09	51
162	2,20951	267	20	13	47
163	2 21218	266	23	16	44
164	2,21484	264	27	19	41
165	2 21748	263	30	22	38
166	2,22011	260	34	26	34
167	2,22271	259	37	29	31
168	2,22530	258	40	32	28
169	2,22788	257	44	36	24
170	2,23045	254	48	39	21
171	2,23299	253	51	42	18
172	2,23552	252	54	46	14
173	2.23804	251	58	49	11
174	2,24055	248	10°, 01	52	08
175	2,24303	[illegible]	05	56	04
Zahl	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.

Zahl	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.
176	2,24551	246	10°,09	59	01
177	2,24797	245	12	10°,02	79°,58
178	2,25042	243	15	06	54
179	2,25285	242	19	09	51
180	2,25527	241	22	12	48
181	2,25768	239	26	16	44
182	2,26007	238	29	19	41
183	2,26245	236	33	22	38
184	2,26481		36	26	34
185	2,26717	234	40	29	31
186	2,26951	233	43	32	28
187	2,27184	231	47	36	24
188	2,27415		50	39	21
189	2,27646	229	54	42	18
190	2,27875	228	57	46	14
191	2,28103	227	11°,01	49	11
192	2,28330	225	04	52	08
193	2,28555		08	56	04
194	2,28780	223	12	59	01
195	2,29003	222	15	11°,02	78°,58
196	2,29225	221	18	06	54
197	2,29446	220	22	09	51
198	2,29666	219	25	12	48
199	2,29885	218	29	15	45
200	2,30103	216	32	19	41
Zahl	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.

Zahl	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.
201	2,30319	216	11°,36	11°,22	78°,38
202	2,30535	214	39	25	35
203	2,80749		43	29	31
204	2,30963	212	46	32	28
205	2,31175	211	50	35	25
206	2,31386		53	39	21
207	2,31597	209	57	42	18
208	2,31806	208	12°,01	45	15
209	2,32014		04	48	12
210	2,32222	206	08	52	08
211	2,32428	205	11	55	05
212	2,32633	204	15	58	02
213	2,32837		18	12°,02	77°,58
214	2,33041	202	22	05	55
215	2,33243		25	08	52
216	2,33445	201	29	12	48
217	2,33646	200	32	15	45
218	2,33845	199	36	18	42
219	2,34044	198	39	21	39
220	2,34242	197	43	25	35
221	2,34439	196	46	28	32
222	2,34635	195	50	31	29
223	2,34830	194	53	34	26
224	2,35024		57	38	22
225	2,35218	193	13°,00	41	19
Zahl	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.

Zahl	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.
226	2,35410	192	13°,04	12°,44	77°,16
227	2,35602	191	07	48	12
228	2,35793	190	11	51	09
229	2,35983	189	15	54	06
230	2,36172	189	18	57	03
231	2,36361	187	22	13°,01	76°,59
232	2,36548		25	04	56
233	2,36735	186	29	07	53
234	2,36921	185	32	10	50
235	2,37106		36	14	46
236	2,37291	184	39	17	43
237	2,37475	182	43	20	40
238	2,37657		46	23	37
239	2,37839		50	27	33
240	2,38021	180	53	30	30
241	2,38201		57	33	27
242	2,38381	179	14°,01	36	24
243	2,38560		04	40	20
244	2,38739	177	08	43	17
245	2,38916		11	46	14
246	2,39093	176	15	49	11
247	2,39269		18	53	07
248	2,39445	175	22	56	04
249	2,39620	174	25	59	01
250	2,39794		29	14°,03	75°,57
Zahl	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.

Zahl	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.
251	2,39967	173	14°,32	14°,06	75°,54
252	2,40140	172	36	09	51
253	2,40312	171	40	12	48
254	2,40483		43	15	45
255	2,40654	170	47	19	41
256	2,40824	169	50	22	38
257	2,40993	168	54	25	35
258	2,41161		58	28	32
259	2,41329		15°,01	31	29
260	2,41497	167	04	35	25
261	2,41664	166	08	38	22
262	2,41830		12	41	19
263	2,41995	165	15	44	16
264	2,42160		19	47	13
265	2,42324	164	22	51	09
266	2,42488	163	26	54	06
267	2,42651	162	29	57	03
268	2,42813		33	15°,01	74°,59
269	2,42975	161	36	04	56
270	2,43136	160	40	07	53
271	2,43296		44	10	50
272	2,43456		47	13	47
273	2,43616	159	51	16	44
274	2,43775	158	54	20	40
275	2,43933		58	23	37
Zahl	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.

Zahl	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.
276	2,44091	157	16°,02	15°,26	74°,34
277	2,44248	156	05	29	31
278	2,44404		09	32	28
279	2,44560	155	12	36	24
280	2,44715		16	39	21
281	2,44870		19	42	18
282	2,45025	153	23	45	15
283	2,45178		27	48	12
284	2,45331		30	52	08
285	2,45484	152	34	55	05
286	2,45636		37	58	02
287	2,45788	151	41	16°,01	73°,59
288	2,45939	150	44	04	56
289	2,46089		48	07	53
290	2,46239		52	11	49
291	2,46389	149	55	14	46
292	2,46538	148	59	17	43
293	2,46686		17°,02	20	40
294	2 46834		06	23	37
295	2,46982	147	10	26	34
296	2,47129	146	13	30	30
297	2,47275		17	33	27
298	2,47421		20	36	24
299	2,47567	145	24	39	21
300	2,47712	144	28	42	18
Zahl	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.

Zahl	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.
301	2,47856	144	17°,32	16°,45	73°,15
302	2,48000		35	48	12
303	2,48144	143	38	52	08
304	2,48287	142	42	55	05
305	2,49429		46	58	02
306	2,48572	141	49	17°,01	72°,59
307	2,48713		53	04	56
308	2,48855		56	07	53
309	2,48996	140	18°,00	11	49
310	2,49136		04	14	46
311	2,49276	139	07	17	43
312	2,49415		11	20	40
313	2,49554		15	23	37
314	2,49693	138	18	26	34
315	2,49831	137	22	29	31
316	2,49968		25	32	28
317	2,50106		29	36	24
318	2,50242		33	39	21
319	2,50379	136	36	42	18
320	2,50515	135	40	45	15
321	2,50650		44	48	12
322	2,50785		47	51	09
323	2,50920	134	51	54	06
324	2,51054		54	57	03
325	2,51188	133	58	18°,00	00
Zahl	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.

Zahl.	Logarith.	Diff.	Sin.	Tan.	Cot.
326	2,51321	133	19°, 02	18°, 04	71°, 56
327	2,51454		05	07	53
328	2,51587	132	09	10	50
329	2,51719		13	13	47
330	2,51851	131	16	16	44
331	2,51982		20	19	41
332	2,52113		24	22	38
333	2,52244	130	27	25	35
334	2,52374		31	28	32
335	2,52504		35	31	29
336	2,52634	129	39	35	25
337	2,52763	128	42	38	22
338	2,52891		45	41	19
339	2,53019		49	44	16
340	2,53148	127	53	47	13
341	2,53275		57	50	10
342	2,53402		20°, 00	53	07
343	2,53529		04	56	04
344	2,53656	126	08	59	01
345	2,53782		11	19°, 02	70°, 58
346	2,53907	125	15	05	55
347	2,54033		19	08	52
348	2,54158	124	22	11	49
349	2,54282		26	15	45
350	2,54406		30	18	42
Zahl.	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.

Zahl	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.
351	2,54530	124	20°, 33	19°, 21	70°, 39
352	2,54654		37	24	36
353	2,54777	123	40	27	33
354	2,54900		44	30	30
355	2,55023	122	48	33	27
356	2,55145		52	36	24
357	2,55267	121	55	39	21
358	2,55388		59	42	18
359	2,55509		21°, 03	45	15
360	2,55630	120	06	48	12
361	2,55750		10	51	09
362	2,55870		14	54	06
363	2,55990		18	57	03
364	2,56110	119	21	20°, 00	00
365	2,56229		25	03	69°, 57
366	2,56348	118	28	06	54
367	2,56466		32	09	51
368	2,56584		36	12	48
369	2,56702		40	16	44
370	2,56820	117	43	19	41
371	2,56937		47	22	38
372	2,57054		51	25	35
373	2,57171	116	54	28	32
374	2,57287		58	31	29
375	2,57403		22°, 02	34	26
Zahl	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.

Zahl.	Logarith.	Diff.	Sin.	Tan.	Cot.
376	2,57519	115	22°, 05	20°, 37	69°, 23
377	2,57634		09	40	20
378	2,57749		13	43	17
379	2,57864	114	17	46	14
380	2,57978		20	49	11
381	2,58092		24	52	08
382	2,58206	113	28	55	05
383	2,58319		31	58	02
384	2,58433		35	21°, 01	68°, 59
385	2,58546	112	39	04	56
386	2,58658		43	07	53
387	2,58771		47	10	50
388	2,58883		50	13	47
389	2,58995	111	54	16	44
390	2,59106		58	19	41
391	2,59217		23°, 01	22	38
392	2,59328		05	25	35
393	2,59439	110	09	27	33
394	2,59549		12	30	30
395	2,59659		16	33	27
396	2,59769		20	36	24
397	2,59879	109	24	39	21
398	2,59988		27	42	18
399	2,60097		31	45	15
400	2,60206	108	35	48	12
Zahl.	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.

Zahl	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.
401	2,60314	108	23°,39	21°,51	68°,09
402	2,60422		42	55	05
403	2,60530		46	57	03
404	2,60638	107	50	22°,00	00
405	2,60745		54	03	67°,57
406	2,60852		57	06	54
407	2,60959		24°,01	09	51
408	2,61066	106	05	12	48
409	2,61172		09	15	45
410	2,61278		13	18	42
411	2,61384	105	16	21	39
412	2,61489		20	24	36
413	2,61595		24	27	33
414	2,61700		28	30	30
415	2,61804	104	31	32	28
416	2,61909		35	35	25
417	2,62013		39	38	22
418	2,62117		43	41	19
419	2,62221		47	44	16
420	2,62325	103	51	47	13
421	2,62428		54	50	10
422	2,62531		58	53	07
423	2,62634		25°,02	56	04
424	2,62736		05	59	01
425	2,62839	102	09	23°,01	66°,59
Zahl	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.

Zahl.	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.
426	2,62941	102	25°,13	23°,05	66°,55
427	2,63043		17	08	52
428	2,63144	101	21	10	50
429	2,63245		25	13	47
430	2,63347		29	16	44
431	2,63447		32	19	41
432	2,63548		36	22	38
433	2,63649	100	40	25	35
434	2,63749		44	28	32
435	2,63849		47	31	29
436	2,63948		51	34	26
437	2,64048	99	55	37	23
438	2,64147		59	39	21
439	2,64246		26°,03	42	18
440	2,64345		06	45	15
441	2,64444	98	10	48	12
442	2,64542		14	51	09
443	2,64640		18	54	06
444	2,64738		22	57	03
445	2,64836	97	26	24°,00	00
446	2,64933		29	02	65°,58
447	2,65030		33	05	55
448	2,65127		37	08	52
449	2,65224		41	11	49
450	2,65321	96	45	14	46
Zahl.	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.

Zahl.	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.
451	2,65417	96	26°, 49	24°, 17	65°, 43
452	2,65513		53	20	40
453	2,65609		56	22	38
454	2,65705		27°, 00	25	35
455	2,65801	95	04	28	32
456	2,65896		08	31	29
457	2,65991		12	34	26
458	2,66086		16	37	23
459	2,66181		20	40	20
460	2,66276	94	23	42	18
461	2,66370		27	45	15
462	2,66464		31	48	12
463	2,66558		35	51	09
464	2,66651		39	54	06
465	2,66745	93	43	56	04
466	2,66838		47	59	01
467	2,66931		51	25°, 02	64°, 58
468	2,67024		54	05	55
469	2,67117		58	08	52
470	2,67209	92	28°, 02	11	49
471	2,67302		06	13	47
472	2,67394		10	16	44
473	2,67486		14	19	41
474	2,67578		18	22	38
475	2,67669	91	22	25	35
Zahl.	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.

Zahl.	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.
476	2,67760	91	28°,26	25°,27	64°,33
477	2,67851		30	30	30
478	2,67942		34	33	27
479	2,68033		37	36	24
480	2,68124	90	41	39	21
481	2,68214		45	42	18
482	2,68304		49	44	16
483	2,68394		53	47	13
484	2,68484		57	50	10
485	2,68574	89	29°,01	53	07
486	2,68663		05	55	05
487	2,68753		09	58	02
488	2,68842		13	26°,01	63°,59
489	2,68931		17	04	56
490	2,69019		21	07	53
491	2,69108	88	25	09	51
492	2,69196		29	12	48
493	2,69284		33	15	45
494	2,69372		36	18	42
495	2,69460		40	20	40
496	2,69548	87	44	23	37
497	2,69635		48	26	34
498	2,69723		52	29	31
499	2,69810		56	31	29
500	2,69897		30°,00	34	26
Zahl.	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.

Zahl.	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.
501	2,69983	86	30°, 04	26°, 37	63°, 23
502	2,70070		08	40	20
503	2,70156		12	42	18
504	2,70243		16	45	15
505	2,70329		20	48	12
506	2,70415		24	51	09
507	2,70501	85	28	53	07
508	2,70586		32	56	04
509	2,70671		36	59	01
510	2,70757		40	27°, 02	62°, 58
511	2,70842		44	04	56
512	2,70927		48	07	53
513	2,71011		52	10	50
514	2,71096	84	56	12	48
515	2,71180		31°, 00	15	45
516	2,71264		04	18	42
517	2,71349		08	21	39
518	2,71433		12	23	37
519	2,71516		16	26	34
520	2,71600	83	20	29	31
521	2,71683		24	31	29
522	2,71767		28	34	26
523	2,71850		32	37	23
524	2,71933		36	40	20
525	2,72016		40	42	18
Zahl.	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.

Zahl	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.
526	2,72098		31°,44	27°,45	62°,15
527	2,72181	82	48	48	12
528	2,72263		53	50	10
529	2,72345		57	53	07
530	2,72427		32°,01	56	04
531	2,72509		05	58	02
532	2,72591		09	28°,01	61°,59
533	2,72672		13	04	56
534	2,72754	81	17	06	54
535	2,72835		21	09	51
536	2,72916		25	12	48
537	2,72997		29	14	46
538	2,73078		33	17	43
539	2,73158		37	20	40
540	2,73239	80	41	22	38
541	2,73319		45	25	35
542	2,73399		50	28	32
543	2,73479		54	30	30
544	2,73559		58	33	27
545	2,73639		33°,02	36	24
546	2,73719	79	06	38	22
547	2,73798		10	41	19
548	2,73878		14	44	16
549	2,73957		18	46	14
550	2,74036		22	49	11
Zahl	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.

Zahl.	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.
551	2,64115		33°,26	28°,52	61°,08
552	2,74194	78	31	54	06
553	2,74272		35	57	03
554	2,74351		39	59	01
555	2,74429		43	29°,02	60°,58
556	2,74507		47	05	55
557	2,74585		51	07	53
558	2,74663		55	10	50
559	2,74741		34°,00	13	47
560	2,74818		04	15	45
561	2,74896	77	08	18	42
562	2,74973		12	20	40
563	2,75051		16	23	37
564	2,75128		20	26	34
565	2,75205		24	28	32
566	2,75281		29	31	29
567	2,75358		33	33	27
568	2,75435	76	37	36	24
569	2,75511		41	39	21
570	2,75587		45	41	19
571	2,75663		49	44	16
572	2,75739		54	46	14
573	2,75815		58	49	11
574	2,75891		35°,02	52	08
575	2,75966	75	06	54	06
Zahl.	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.

Zahl.	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.
576	2,76042	75	35°, 10	57	03
577	2,76117		15	59	01
578	2,76192		19	30°, 02	59°, 58
579	2,76268		23	04	56
580	2,76342		27	07	53
581	2,76417		32	10	50
582	2,76492		36	12	48
583	2,76567	74	40	15	45
584	2,76641		44	17	43
585	2,76715		48	20	40
586	2,76789		53	22	38
587	2,76863		57	25	35
588	2,76937		36°, 01	28	32
589	2,77011		05	30	30
590	2,77085		10	33	27
591	2,77158		14	35	25
592	2,77232	73	18	38	22
593	2,77305		23	40	20
594	2,77378		27	43	17
595	2,77451		31	45	15
596	2,77524		35	48	12
597	2,77597		40	50	10
598	2,77670		44	53	07
599	2,77742		48	56	04
600	2,77815		53	58	02
Zahl.	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.

Zahl	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.
601	2,77887	72	57	31°,01	58°,59
602	2,77959		37°,01	03	57
603	2,78031		05	06	54
604	2,78103		10	08	52
605	2,78175		14	11	49
606	2,78247		18	13	47
607	2,78319		23	16	44
608	2,78390		27	18	42
609	2,78462	71	32	21	39
610	2,78533		36	23	37
611	2,78604		40	26	34
612	2,78675		44	28	32
613	2,78746		49	31	29
614	2,78817		53	33	27
615	2,78887		58	36	24
616	2,78958		38°,02	38	22
617	2,79028		06	41	19
618	2,79099	70	11	43	17
619	2,79169		15	46	14
620	2,79239		19	48	12
621	2,79309		24	51	09
622	2,79379		28	53	07
623	2,79448		33	56	04
624	2,79518		37	58	02
625	2,79588		41	32°,01	57°,59
Zahl	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.

Zahl	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.
626	2,79657	69	38°,46	32°,03	57°,57
627	2,79726		50	05	55
628	2,79796		55	08	52
629	2,79865		59	10	50
630	2,79934		39°,03	13	47
631	2,80003		08	15	45
632	2,80071		12	18	42
633	2,80140		17	20	40
634	2,80209	68	21	23	37
635	2,80277		26	25	35
636	2,80345		30	28	32
637	2,80414		34	30	30
638	2,80482		39	33	27
639	2,80550		43	35	25
640	2,80618		48	37	23
641	2,80685		52	40	20
642	2,80753		57	42	18
643	2,80821		40° 01	45	15
644	2,80888		06	47	13
645	2,80956	67	10	50	10
646	2,81023		15	52	08
647	2,81090		19	54	06
648	2,81157		24	57	03
649	2,81224		28	59	01
650	2,81291		33	33°,02	56°,58
Zahl	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.

Zahl	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.
651	2,81358		40°,37	33°,04	56°,56
652	2,81424		42	06	54
653	2,81491		46	09	51
654	2,81557		51	11	49
655	2,81624	66	55	14	46
656	2,81690		41°,00	16	44
657	2,81756		05	18	42
658	2,81822		09	21	39
659	2,81888		14	23	37
660	2,81954		18	26	34
661	2,82020		23	28	32
662	2,82085		28	30	30
663	2,82151		32	33	27
664	2,82216		37	35	25
665	2,82282	65	41	38	22
666	2,82347		46	40	20
667	2,82412		51	42	18
668	2,82477		55	45	15
669	2,82542		42°,00	47	13
670	2,82607		05	50	10
671	2,82672		09	52	08
672	2,82737		14	54	06
673	2,82801		18	57	03
674	2,82866		23	59	01
675	2,82930	64	28	34°,01	55°,59
Zahl	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.

Zahl	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.
676	2,82994	64	42°,32	34°,04	55°,56
677	2,83059		37	06	54
678	2,83123		41	08	52
679	2,83187		46	11	49
680	2,83251		51	13	47
681	2,83314		56	16	44
682	2,83378		43°,00	18	42
683	2,83442		05	20	40
684	2,83505		09	23	37
685	2,83569	63	14	25	35
686	2,83632		19	27	33
687	2,83695		24	30	30
688	2,83759		29	32	28
689	2,83822		33	34	26
690	2,83885		38	37	23
691	2,83947		43	39	21
692	2,84010		48	41	19
693	2,84073		52	43	17
694	2,84136		57	46	14
695	2,84198		44°,02	48	12
696	2,84261	62	07	50	10
697	2,84323		11	53	07
698	2,84385		16	55	05
699	2,84447		21	57	03
700	2,84509		26	35°,00	00
Zahl	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.

701

Zahl	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.
701	2,84571	62	44°, 31	35°, 02	54°, 58
702	2,84633		36	04	56
703	2,84695		41	07	53
704	2,84757		45	09	51
705	2,84819		50	11	49
706	2,84880		55	14	46
707	2,84942	61	45°, 00	16	44
708	2,85003		04	18	42
709	2,85064		09	20	40
710	2,85126		14	23	37
711	2,85187		19	25	35
712	2,85248		24	27	33
713	2,85309		29	30	30
714	2,85369		34	32	28
715	2,85430		39	34	26
716	2,85491		44	36	24
717	2,85552		49	39	21
718	2,85612		54	41	19
719	2,85673	60	59	43	17
720	2,85733		46°, 04	45	15
721	2,85793		09	48	12
722	2,85853		14	50	10
723	2,85913		19	52	08
724	2,85973		24	54	06
725	2,86033		29	57	03
Zahl	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.

Zahl.	Logarith.	Diff.	Sin.	Tan.	Cot.
726	2,86093	60	46°, 34	59	01
727	2,86153		39	36°, 01	53°, 59
728	2,86213		44	03	57
729	2,86272		49	06	54
730	2,86332		54	08	52
731	2,86391		59	10	50
732	2,86451	59	47°, 04	12	48
733	2,86510		09	15	45
734	2,86569		14	17	43
735	2,86628		19	19	41
736	2,86687		24	21	39
737	2,86746		29	24	36
738	2,86805		34	26	34
739	2,86864		39	28	32
740	2,86923		44	30	30
741	2,86981		49	32	28
742	2,87040		55	35	25
743	2,87099	58	48°, 00	37	23
744	2,87157		05	39	21
745	2,87215		10	41	19
746	2,87274		15	43	17
747	2,87332		20	46	14
748	2,87390		26	48	12
749	2,87448		31	50	10
750	2,87506		36	52	08
Zahl.	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.

Zahl	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.
751	2,87564	58	48°, 41	36°, 54	53°,06
752	2,87621		46	57	03
753	2,87679		51	59	01
754	2,87737	57	57	37°, 01	52°,59
755	2,87794		49°, 02	03	57
756	2,87852		07	05	55
757	2,87909		13	08	52
758	2,87967		18	10	50
759	2,88024		23	12	48
760	2,88081		28	14	46
761	2,88138		34	16	44
762	2,88195		39	19	41
763	2,88252		44	21	39
764	2,88309		49	23	37
765	2,88366		55	25	35
766	2,88423		50°, 00	27	33
767	2,88479		06	29	31
768	2,88536	56	11	32	28
769	2,88592		16	34	26
770	2,88649		22	36	24
771	2,88705		27	38	22
772	2,88761		33	40	20
773	2,88818		38	42	18
774	2,88874		43	44	16
775	2,88930		49	47	13
Zahl	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.

Zahl.	Logarith.	Diff.	Sin.	Tan.	Cot.
776	2,88986	56	54	37°, 49	52°, 11
777	2,89042		51°, 00	51	09
778	2,89097		05	53	07
779	2,89153		11	55	05
780	2,89209		16	57	03
781	2,89265		22	59	01
782	2,89320		27	38°, 02	51°, 58
783	2,89376	55	33	04	56
784	2,89431		38	06	54
785	2,89487		44	08	52
786	2,89542		49	10	50
787	2,89597		55	12	48
788	2,89652		52°, 00	14	46
789	2,89707		06	17	43
790	2,89762		12	19	41
791	2,89817		17	21	39
792	2,89872		23	23	37
793	2,89927		29	25	35
794	2,89982		34	27	33
795	2,90036		40	29	31
796	2,90091	54	45	31	29
797	2,90145		51	33	27
798	2,90200		57	36	24
799	2,90254		53°, 03	38	22
800	2,90309		08	40	20
Zahl.	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.

Zahl.	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.
801	2,90363	54	53°, 14	38°, 42	51°, 18
802	2,90417		19	44	16
803	2,90471		25	46	14
804	2,90525		31	48	12
805	2,90579		37	50	10
806	2,90633		42	52	08
807	2,90687		48	54	06
808	2,90741		54	56	04
809	2,90794		54°, 00	58	02
810	2,90848		06	39°, 01	50°, 59
811	2,90902	53	12	03	57
812	2,90955		18	05	55
813	2,91009		24	07	53
814	2,91062		29	09	51
815	2,91115		35	11	49
816	2,91169		41	13	47
817	2,91222		47	15	45
818	2,91275		53	17	43
819	2,91328		59	19	41
820	2,91381		55°, 05	21	39
821	2,91434		11	23	37
822	2,91487		17	25	35
823	2,91539		23	27	33
824	2,91592		29	29	31
825	2,91645		35	31	29
Zahl.	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.

Zahl.	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.
826	2,91698	52	55°,42	39°,34	50°,26
827	2,91750		48	36	24
828	2,91803		54	38	22
829	2,91855		56°,00	40	20
830	2,91907		06	42	18
831	2,91960		12	44	16
832	2,92012		19	46	14
833	2,92064		25	48	12
834	2,92116		31	50	10
835	2,92168		37	52	08
836	2,92220		43	54	06
837	2,92272		50	56	04
838	2,92324		56	58	02
839	2,92376		57°,03	40°,00	00
840	2,92428		09	02	49°,58
841	2,92479		15	04	56
842	2,92531		21	06	54
843	2,92582		28	08	52
844	2,92634	51	34	10	50
845	2,92685		40	12	48
846	2,92737		47	14	46
847	2,92788		54	16	44
848	2,92839		58°,00	18	42
849	2,92890		06	20	40
850	2,92942		13	22	38
Zahl.	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.

Zahl.	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.
851	2,92993	51	58°, 19	40°, 24	40°,36
852	2,93044		26	26	34
853	2,93095		33	28	32
854	2,93145		39	30	30
855	2,93196		46	32	28
856	2,93247		52	34	26
857	2,93298		59	36	24
858	2,93348		59°, 06	38	22
859	2,93399		13	40	20
860	2,93449		19	42	18
861	2,93500		26	44	16
862	2,93550		33	46	14
863	2,93601	50	39	48	12
864	2,93651		46	50	10
865	2,93701		53	52	08
866	2,93751		60°, 00	54	49°,06
867	2,93801		07	56	04
868	2,93851		14	58	02
869	2,93901		21	41°, 00	00
870	2,93951		28	02	48°,58
871	2,94001		35	03	57
872	2,94051		42	05	55
873	2,94101		49	07	53
874	2,94151		56	09	51
875	2,94201		61°, 03	11	49
Zahl.	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.

Zahl.	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.
876	2,94250	50	61°,10	41°,13	48°,47
877	2,94299		17	15	45
878	2,94349		24	17	43
879	2,94398		31	19	41
880	2,94448	49	39	21	39
881	2,94497		46	23	37
882	2,94547		53	25	35
883	2,94596		62°,00	27	33
884	2,94645		08	29	31
885	2,94694		15	31	29
886	2,94743		23	33	27
887	2,94792		30	35	25
888	2,94841		37	36	24
889	2,94890		45	38	22
890	2,94939		53	40	20
891	2,94987		63°,00	42	18
892	2,95036		08	44	16
893	2,95085		15	46	14
894	2,95133		23	48	12
895	2,95182	48	31	50	10
896	2,95230		38	52	08
897	2,95279		46	54	06
898	2,95327		54	56	04
899	2,95375		64°,02	57	03
900	2,95424		10	59	01
Zahl.	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.

Zahl.	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.
901	2,95472	48	64°, 18	42°, 01	47°,59
902	2,95520		25	03	57
903	2,95568		33	05	55
904	2,95617		41	07	53
905	2,95665		49	09	51
906	2,95712		58	11	49
907	2,95760		65°, 06	13	47
908	2,95808		14	14	46
909	2,95856		22	16	44
910	2 95904		30	18	42
911	2,95952		39	20	40
912	2,95999		47	22	38
913	2,96047	47	56	24	36
914	2,96094		66°, 04	26	34
915	2 96142		12	28	32
916	2,96189		21	29	31
917	2,96237		30	31	29
918	2,96284		38	33	27
919	2 96331		47	35	25
920	2,96378		56	37	23
921	2,96426		67°, 04	39	21
922	2,96473		13	41	19
923	2,96520		22	43	17
924	2,96567		31	44	16
925	2,96614		40	46	14
Zahl.	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.

Zahl	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.
926	2,96661	47	49	42°,48	47°,12
927	2,96708		58	50	10
928	2,96754		68°,07	52	08
929	2,96801		17	54	06
930	2,96848		26	55	05
931	2,96895		36	57	03
932	2,96941		45	59	01
933	2,96988		55	43°,01	46°,59
934	2,97034		69°,05	03	57
935	2,97081	46	14	05	55
936	2,97127		24	06	54
937	2,97173		33	08	52
938	2,97220		43	10	50
939	2,97266		53	12	48
940	2,97312		70°,03	14	46
941	2,97359		13	16	44
942	2,97405		23	17	43
943	2,97451		34	19	41
944	2 97497		44	21	39
945	2,97543		55	23	37
946	2 97589		71°,05	25	35
947	2,97635		16	26	34
948	2,97681		27	28	32
949	2,97726		37	30	30
950	2,97772		48	32	28
Zahl	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.

Zahl.	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.
951	2,97818	46	59	43°, 34	46°,26
952	2,97863		72°, 11	36	24
953	2,97909		22	37	23
954	2,97955	45	33	39	21
955	2,98000		45	41	19
956	2,98045		56	43	17
957	2,98091		73°, 08	45	15
958	2,98136		20	46	14
959	2,98182		32	48	12
960	2,98227		45	50	10
961	2,98272		57	52	08
962	2,98317		74°, 09	53	07
963	2,98362		22	55	05
964	2,98407		35	57	03
965	2,98452		48	59	01
966	2,98497		75°, 01	44°, 01	45°,59
967	2,98542		14	02	58
968	2,98587		28	04	56
969	2,98632		42	06	54
970	2,98677		56	08	52
971	2,98722		76°, 10	09	51
972	2,98766		25	11	49
973	2,98811		39	13	47
974	2,98856	44	54	15	45
975	2,98900		77°, 10	17	43
Zahl.	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.

Zahl	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.
976	2,98944	44	77°,25	44°,18	45°,42
977	2,98989		41	20	40
978	2,99034		58	22	38
979	2,99078		78°,14	24	36
980	2,99122		31	25	35
981	2,99167		49	27	33
982	2,99211		79°,07	29	31
983	2,99255		25	31	29
984	2,99299		44	32	28
985	2,99343		80°,04	34	26
986	2,99387		24	36	24
987	2,99431		45	38	22
988	2,99475		81°,07	39	21
989	2,99519		30	41	19
990	2,99563		53	43	17
991	2,99607		82°,18	44	16
992	2,99651		45	46	14
993	2,99695	43	83°,13	48	12
994	2,99738		43	50	10
995	2,99782		84°,16	51	09
996	2,99826		52	53	07
997	2,99869		85°,34	55	05
998	2,99913		86°,23	57	03
999	2,99956		87°,27	58	02
1000	3,00000		90°,00	45°,00	00
Zahl	Logarith.	Diff	Sin.	Tan.	Cot.

Anfangsgründe der Geometrie

Erster Abschnitt.

Von den Linien und Winckeln.

Erklärung.

§. 245.

Ein Geometrischer Körper (Solidum, corpus) ist nach allen Seiten ausgedehnt: die äusersten Grentzen desselben (Termini) heissen Oberflächen (Superficies); die Grentzen der Oberflächen sind Linien, und die Grentzen der Linien sind Puncte.

Anmerckung.

§. 246. Ein Punct hat keine Grösse und keine Theile. Eine Linie ist lang, aber weder breit noch dick. Eine Oberfläche hat eine Länge und eine Breite, aber keine Dicke.

Erklärung.

§. 247. Es ist bekannt, was eine gerade Linie sey. Eine krumme Linie aber ist diejenige, in welcher kein Theil gerade ist. Die übrigen Linien sind aus geraden, oder aus krummen Linien, oder aus beiden zugleich zusammengesetzt.

Anmerckung.

§. 248. Zwischen jegliche zween Puncte fällt eine gerade Linie, aber nur eine einzige, und diese ist die kürtzeste von allen Linien, welche man von einem Punct zu dem andern ziehen kan.

§. 249. Auch kan man eine jede gerade Linie, von ihren beiden Grentzen an, ohne Ende fortziehen, aber dieses kan auf jeder Seite nur mit einem Zuge geschehen. Zwo verschiedne gerade Linien können keinen gemeinschaftlichen Theil haben, welchen man in zween Puncte einschliessen könnte; sondern sie können einander nur in einem einzigen Punct schneiden.

§. 250. Zwo gerade Linien aber, welche man zwischen einerley Puncte legen kan, fallen, wenn dieses geschieht, zusammen, und sind einander gleich. Kan aber die eine nicht zwischen eben die Puncte gelegt werden, zwischen denen die andre Platz hat, so sind diese Linien ungleich. Hieraus folgt, daß alle gerade Linien, welche gleich sind, zusammenfallen, oder einander decken können (congruere).

Erklä-

Erklärung.

§. 251. Eine ebene Oberfläche, oder überhaupt eine Ebene (Planum) ist in die Länge und Breite nach geraden Linien ausgedehnt; so daß, wenn man zwischen jegliche zween Puncte in derselben eine gerade Linie legt, diese Linie gantz in die Oberfläche fällt, man mag sie verlängern wie man will. Hingegen nennt man eine krumme Oberfläche diejenige, in welcher kein Theil eben ist.

Anmerckung.

§. 252. Die Geometern lösen ihre Aufgaben durch Linien auf, welche in einer Ebene gezogen werden. Sie fordern also, daß ein jeder, der in dieser Wissenschaft unterrichtet seyn will, gerade Linien in einer Ebene zu ziehen, und zu verlängern wisse, welche von denen, die wir uns durch den Verstand vorstellen, so wenig als möglich ist, abweichen.

§. 253. Wenn man aber in einer Ebene aus dem Punct A eine gerade Linie AB, und aus eben diesem Punct eine andre AC ziehet, so entfernet sich diese AC desto mehr von der AB, je mehr man sie verlängert, das ist, die kürtzeste Linie CD, welche von ihrem Ende C nach der Linie AB gezogen werden kan, wird immer grösser und grösser. Es ist nicht möglich, daß, indem man AC beständig verlängert, diese Linie CD anfangs wachse, und hernach wieder Fig. 6

 abnehme,

abnehme, oder weder wachse noch abnehme. Sie kan vielmehr, wenn man die AC zu verlängern fortfährt, eine jede Grösse erhalten.

Erklärung.

§. 254. Wenn aus einem Punct einer Ebene zwo verschiedne gerade Linien gezogen sind, so heißt die Neigung dieser beiden Linien gegen einander, ein ebener und geradlinichter Winckel. Denn es giebt auch krummlinichte Winckel, und solche, die nicht eben sind. Die Linien, welche den Winckel einschliessen, nennet man die Seiten oder Schenckel, und den Punct, aus welchem dieselben gezogen sind, die Spitze, oder den Scheitel des Winckels (Vertex).

Anmerckung.

§ 255. Man schreibt den Winckeln eine Grösse zu; diese hängt aber nicht von der Länge ihrer Seiten, sondern bloß von der Neigung derselben gegen einander ab Daher sind die Winckel gleich, wenn einer in den andern dergestalt passet, daß wenn man ihre Spitzen mit einander vereiniget, auch die Schenckel des einen Winckels auf die Schenckel des andern fallen; ohne daß man auf die Puncte sieht, in welchen sich diese Schenckel endigen.

Fig. 7. §. 256 Vereinigt man aber die Spitze des Winckels ABC mit der Spitze des Winckels DBC dergestalt

stalt, daß auch der Schenckel BC des Winckels ABC, auf den Schenckel BC des Winckels DBC falle, und es fallen alsdenn die andern Schenckel AB, DB nicht ebenfalls zusammen: so sagt man, der Winckel ABC ist grösser, als der Winckel DBC, dessen Schenckel DB sich am wenigsten von dem Schenckel BC entfernet. Man pflegt dieses auch in allen Fällen folgendergestalt zu bezeichnen: ABC > DBC (ABC ist grösser als DBC) und DBC < ABC (DBC ist kleiner als ABC). Und da die Winckel ABC, DBC, deren einer nicht in den andern passet, ungleich sind, so folgt hieraus, daß alle gleiche Winckel genau in einander passen, oder einander decken müssen.

§. 257. Daß aber ein ebener und geradlinichter Winckel ABC einen andern DEC nicht decken könne, schließt man überhaupt daraus, wenn, nachdem die Seiten dieser Winckel BC, EC in eine gerade Linie fallen, die andern Seiten AB, ED, wenn man sie verlängert, einander schneiden; es mag nun dieses in den Spitzen der beiden Winckel geschehen, wenn dieselben in einen Punct zusammenfallen, oder in einem andern Punct F, welcher von der Spitze entfernt ist. Hieraus folgt, daß wenn man zwo gerade Linien AB, DE an eine dritte EC dergestalt leget, daß dieselben, wenn man sie verlängert, in dem Punct F zusammenlaufen, und einander daselbst schneiden, die Winckel ABC, DEC ungleich seyn werden. Fig. 8.

§. 258. Eben so leicht sieht man, daß in diesem Fall, wenn die zwo Linien AB, DE zusammenlaufen sen, der Winckel ABC, welcher auser den Linien AB, DE fällt, grösser sey, als der innere Winckel DEC, welcher zwischen diesen Linien liegt. Denn wenn man die zween Winckel ABC und DEC unmittelbar mit einander vergleichen will, damit man erfahre, welcher von beiden der grössere sey, so kan man diesen Zweck erhalten, wenn man den Winckel ABC dergestalt an die Seite EC des Winckels DEC leget, wie er hier gezeichnet ist, und alsdenn denselben an dieser Seite beständig gegen E fortschiebet. So lange nun die Seite DE von der AB nicht geschnitten wird, kan man noch nicht wissen, welcher von den beiden Winckeln der grössere sey. Kan der Winckel ABC mit seiner Spitze bis an E gebracht werden, ohne daß die Seite AB die Seite DE sonst irgendwo berühre, so ist der Winckel ABC kleiner als DEC; fällt aber, so bald B in E gebracht wird, auch die Seite BA auf die Seite DE, so sind die Winckel einander gleich; und wenn der Winckel ABC nicht grösser seyn soll, als der Winckel DEC, so muß eins von diesen beiden gewiß erfolgen. Erfolgt es also nicht, sondern AB schneidet die ED, bevor die Spitze B die Spitze E erreicht hat, so ist allerdings der Winckel ABC grösser als der Winckel DEC. Man sieht in diesem Fall deutlich, daß man den Winckel ABC nicht in den Winckel DEC werde einschieben können, und daß folglich der erstere dem letzteren weder gleich seyn könne, noch kleiner als derselbe.

§. 259. Man kan dieses auch umkehren, und als einen Grundsatz annehmen, daß wenn man an eine

gerade

gerade Linie EC einen Winckel DEC leget, und einen andern ABC, welcher grösser ist als jener, so daß der kleinere Winckel der innere zwischen den Seiten DE, AB sey, und der grössere ABC der äussere; die verlängerten Seiten BA, ED einander gewiß erreichen, und alsdenn schneiden werden. Solte jemand Schwierigkeit finden diesen Satz zuzugeben, so wird er nach einer kleinen Ueberlegung leicht sehen, daß diese Schwierigkeit keinen andern Grund haben könne, als daß vielleicht die Entfernung EB allzugroß genommen seyn möchte. Denn wenn diese EB klein genug genommen wird, so kan der Satz nicht in Zweifel gezogen werden, weil wenn die Linien ED, BA gar nicht zusammen liefen, so klein man auch EB nehmen möchte, der Winckel ABC nicht grösser seyn könte, als der Winckel DEC (§. 258.). Wird aber nur dieses zugestanden, so sieht man leicht, daß eben der Satz bey einer jeden Grösse der EB richtig seyn müsse. Denn gesetzt es laufe die verlängerte ED mit der AB in F zusammen. Soll nun diese EF noch länger werden, ohne daß sie die AB würcklich durchschneide, und ohne Veränderung des Winckels ABC; so muß die Linie AB von dem Punct F, indem sich dieser immer von E entfernet, zugleich mit fortgeschoben werden. Dadurch aber wird die EB allerdings verlängert. Nun kan man die EF ohne Ende fortziehen, und der letzte Punct derselben kan nicht aufhören bey dieser Verlängerung die AB mit fortzuschieben, bevor er entweder anfängt sich selbst in der geraden Linie BA zu bewegen, oder von dieser Linie wieder zurück kehret, welches beides mit dem Begrif einer geraden Linie nicht bestehen kan (§. 229.); es wird also EB durch die fortgesetzte Verlängerung der EF endlich so groß, als man sie immer verlangen mag.

Erklärung.

Fig. 9. §. 260. Wenn die gerade Linie AB, indem man sie an die gerade Linie CD leget, mit dieser zween Nebenwinckel (angulos contiguos) ABC, ABD macht, welche einander gleich sind, so sagt man die Linie AB steht gerade oder senckrecht auf der Linie CD, und diese auf jener (Recta, Perpendicularis): ein jeder aber von den Winckeln ABC, ABD, welche die beiden senckrechten Linien mit einander einschliessen, heißt ein gerader oder rechter Winckel (Rectus).

Anmerckung.

§. 261. Einer jeden geraden Linie CD, kan eine andre AB, durch einen jeden Punct der Ebene in welcher CD gezogen ist, senckrecht gestellt werden. Und wenn man dergleichen senckrechte Linien, an verschiedne gerade Linien, oder an verschiedne Puncte einer geraden Linie stellet, so sind alle die rechten Winckel, welche dadurch entstehen, einander gleich. Ist also ein Winckel grösser oder kleiner als ein rechter Winckel, so ist er keinem einigen rechten Winckel gleich, und er wird auch nicht von zwo geraden

Linien eingeschlossen, welche auf einander senckrecht stehen.

§. 262. Wenn also die gerade Linie CD auf der geraden Linie AB senckrecht stehet, und man zieht durch einen Punct C oder D dieser CD, eine andre gerade Linie DE oder CF, so wird keine von diesen auf der Linie AB senckrecht stehen, weil weder der Winckel EDB noch der Winckel CFB dem rechten Winckel CDB gleich ist (§. 256. u. f.). Es werden also zwo gerade Linien, welche auf eben derselben Linie AB senckrecht stehen, einander nicht schneiden, so sehr man sie auch verlängern mag. Fig. 10.

§. 263. Man nimmt den rechten Winckel zu einem Maas, woraus man die übrigen Winckel ausdrückt. Da also derselbe sehr öfters mit andern Winckeln zu vergleichen seyn wird, so wird man ihn der Kürtze wegen mit R, die Summe zweyer rechten Winckel mit 2R, die Summe von vier rechten Winckeln mit 4R, und so die übrigen, bezeichnen.

Erklärung.

§. 264. Die gerade Linie AB, welche auf der geraden Linie CD dergestalt stehet, daß die Nebenwinckel ABC, ABD ungleich werden, steht schief auf dieser CD (obliqua); und es werden auch die Winckel ABC, ABD schiefe Winckel genennt. Da nun einer von diesen Winckeln ABC grösser ist als der rechte Winckel EBC, der an- Fig. 11.

dre hingegen ABD kleiner als dieser, so nennt man den grössern einen stumpfen (obtusus), und den kleinern einen spitzigen Winckel (acutus).

Anmerckung.

§. 265. Der stumpfe Winckel ABC übertrift den rechten Winckel EBC, um den Winckel ABE, und um eben diesen Winckel ist der spitzige Winckel ABD, der Nebenwinckel des stumpfen Winckels auf der geraden Linie CD, kleiner als der rechte Winckel. Da nun der Ueberschuß des einen, was dem andern abgeht, ersetzet, so ist die Summe der Winckel ABC, ABD zween rechten Winckeln gleich.

§. 266. Wenn man sich daher vorstellet, daß die Theile CB, BD von einerley geraden Linie CD, den Winckel CBD einschliessen, so wird dieser Winckel welcher der Summe der beiden Winkel ABC, ABD gleich ist, auch selbst zween rechten Winckeln gleich seyn. Alle übrigen Winckel sind entweder grösser oder kleiner als zween rechte Winckel. Man pflegt aber die Winckel, welche grösser sind als zween rechte, niemals zu gebrauchen, wenn andre Winckel, die nicht grösser sind als 2R, eben so weit führen können. Da nun diese kleineren Winckel in den meisten Fällen hinlänglich sind, so sind auch die allermeisten Sätze, in welchen von Winckeln die Rede ist, nur von solchen Winckeln zu erklären, die kleiner sind als 2R. Ob also zwar eine jede gerade Linie, mit einer jeden andern, mit welcher sie nur einen Punct gemeinschaftlich hat, eigentlich

eigentlich zween Winckel einschliesset, deren einer kleiner oder doch nicht grösser ist als 2R, der andre aber grösser ist als 2R oder doch nicht kleiner: so ist doch nur alsdenn der letzte Winckel anstatt des ersten zu nehmen, wenn der Satz keinen andern Verstand leidet.

Erklärung.

§. 267. Zwo in einer Ebene gezogene gerade Linien, welche, man mag sie verlängern wie man will, niemals zusammenlaufen, sind gleichlaufend oder parallel.

Anmerckung.

§. 268. Dergleichen sind die zwo gerade Linien, AB, CD, welche, da sie beide auf einer dritten EF senckrecht stehen, wenn man sie nach A und C verlängert, nicht zusammenlaufen können (§. 262.). Verlängert man sie aber nach den entgegen gesetzten Seiten G, H, so wird der Winckel ABG zween rechten Winckeln gleich (§. 266), also wird, da ABE ein rechter Winckel ist, auch EBG ein rechter Winckel, und BG sowohl, als aus eben den Gründen DH, auf der EF senckrecht stehen. Folglich werden die verlängerten Linien AB, CD auch auf dieser Seite nicht zusammen laufen. Fig. 12.

Lehrsatz.

§. 269. Wenn in einer Ebene, aus einem Punct A verschiedne gerade Linien AB, AC, AD, Fig. 13.

AD, AE gezogen sind, und man zieht durch diesen Punct noch eine andre gerade Linie FG: so werden alle die Winckel FAB, BAC, CAD, DAG, welche hiedurch an der einen Seite der Linie FG entstehen, zween rechten Winckeln gleich, und die Winckel FAE, GAE an der andern Seite, ebenfalls zween rechten Winckeln gleich seyn.

Beweis.

Denn es ist die Summe aller Winckel, welche an einerley Seite der geraden Linie FG liegen, dem Winckel FAG, dieser aber zween rechten Winckeln gleich (§. 266.).

Der 1. Zusatz.

§. 270. Folglich ist die Summe aller Winckel BAC, CAD, DAE, EAB welche in einer Ebene um einen Punct A herumgelegt werden können, vier rechten Winckeln gleich.

Der 2. Zusatz.

Fig. 14. §. 271. Man sieht auch hieraus, daß wenn an eine gerade Linie AB zwo andre CD, EF dergestalt gesetzt werden, daß einer der inneren Winckel DAB, dem äuseren welcher nach eben der Seite gekehrt ist FGB, ungleich wird, die verlängerten Linien CD, EF einander auf dieser oder jener Seite von AB

schneiden

schneiden müssen. Denn wenn DAB < FGB, so ist aus §. 259. klar, daß die Linien CD, EF einander schneiden werden, wenn man sie nach D und F verlängert. Wäre aber DAB > FGB, so ist, weil DAB + CAB = 2R, und auch FGB + EGB = 2R, der Winckel CAB kleiner als EGB, und die verlängerten DC, FE schneiden einander auf der Seite von C, E.

Der 3. Zusatz.

§. 272. Wenn also zwo gerade Linien AB, CD einander in E schneiden, und man ziehet in derselben Ebene eine dritte Linie FG nach Willkühr, so muß diese FG wenigstens eine der vorigen AB, CD, schneiden, wenn sie gehörig verlängert wird. Denn wenn man die Linie EHI wie man will durch die FG ziehet, so muß nothwendig einer der beiden Winckel DEI, BEI grösser oder kleiner werden, als der Winckel GHI. Fig. 15.

Lehrsatz.

§. 273. Wenn eine gerade Linie eine andre schneidet, so sind die bey dem Scheitel entgegengesetzten Winckel ABC, DBE einander gleich. Fig. 16.

Beweis.

Denn es ist die Summe der Winckel ABC, ABD, der Summe der Winckel ABD, DBE

gleich;

gleich; folglich, wenn man den gemeinschaftlichen Winckel ABD auf beiden Seiten wegnimmt, ABC=DBE.

Lehrsatz.

Fig. 17. §. 274. Wenn zwo gerade Linien AB, CD von einer dritten EF in G und H geschnitten werden, und es ist der äusere Winckel EGB, dem inneren Winckel EHD gleich, so sind die geraden Linien AB, CD parallel.

Beweis.

Weil der Winckel AGF dem Winckel EGB gleich ist, und CHF=EHD (§. 273.), so werden auch die Winckel AGF, CHF einander gleich seyn. Sind nun die geraden Linien AB, CD nicht parallel, so laufen dieselben, wenn man sie verlängert, entweder auf der Seite A, C, oder auf der Seite B, D zusammen. Geschieht das erste, so werden die Winckel AGF, CHF ungleich, geschieht das letzte, so werden die Winckel EGB, EHD ungleich (§. 257.). Folglich können die geraden Linien AB, CD, so sehr man sie verlängern mag, nicht zusammenlaufen, sondern sie sind parallel (§. 267.).

Der

Der 1. Zusatz.

§. 275. Wenn die geraden Linien AB, CD, durch eine dritte, wie eben gesagt worden ist, geschnitten werden, und es sind die Wechselswinckel (anguli alterni) AGF, EHD einander gleich, so sind die geraden Linien AB, CD ebenfalls parallel. Denn weil AGF = EGB, so ist, wenn AGF = EHD auch EGB = EHD.

Der 2. Zusatz.

§. 276. Auch werden die dergestalt geschnittenen geraden Linien AB, CD parallel seyn, wenn die Summe der Winckel BGH, GHD, welche zwischen diesen Linien auf einer Seite der Linie EF liegen, zween rechten Winckeln gleich ist. Denn weil AGH + HGB = 2R (§. 269.), so wird auch AGH + HGB = HGB + GHD, folglich wenn man den gemeinschaftlichen Winckel HGB wegnimt, AGH = GHD seyn.

Lehrsatz.

§. 277. Wenn zwo Parallellinien AB, CD, von einer dritten geraden Linie EF, in G, H geschnitten werden, so sind die Winckel EGB, EHD einander gleich. Fig. 17.

Beweis.

Denn wenn diese Winckel ungleich wären, so würden die verlängerten Linien AB, CD auf dieser oder jener Seite zusammenlaufen (§. 271.), folglich nicht parallel seyn.

Anmer-

Anmerckung.

§. 278. Man kan eben dieses auf eine andre Art beweisen, wenn man als einen Grundsatz annimmt, daß einer geraden Linie CD durch einen Punct G auser derselben, in einerley Ebene, nur eine einzige Parallellinie gezogen werden könne. Denn wenn nunmehr der Winckel EGB dem Winckel EHD nicht gleich seyn solte, so lege man an die Linie EF einen andern Winckel EGI welcher diesem EHD gleich sey; alsdenn wird GI der CD parallel (§. 274), und es sind der geraden Linie CD durch eben denselben Punct G zwo Parallelinien gezogen worden, welches ein Wiederspruch ist.

Der 1. Zusatz.

§. 279. Weil der Winckel AGF dem Winckel EGB gleich ist, so sind auch, wenn zwo Parallellinien von einer dritten geschnitten werden, die Wechselswinckel AGF, EHD einander gleich.

Der 2. Zusatz.

§. 280. Und weil die Summe der Winckel AGF, FGB, zween rechten Winckeln gleich ist (§. 269.); so wird auch, wenn man anstatt des Winckels AGF den Winckel EHD zu dem Winckel FGB setzet, die Summe EHD+FGB zween rechten Winckeln gleich seyn.

Der 3. Zusatz.

§. 281. Eine gerade Linie welche auf einer von zwo Parallellinien senckrecht steht, steht auch auf der andern senckrecht. Daher sind zwo gerade Linien, welche einer dritten in eben derselben Ebene parallel sind, auch unter sich parallell.

Zweyter Abschnitt.

Von den Winckeln und Seiten der Figuren.

Erklärung.

§. 282.

Ein Körper oder eine Oberfläche, deren Ausdehnung auf allen Seiten begrentzt ist, giebt eine Figur. Eine ebene Figur ist eine ebene Oberfläche, welche auf allen Seiten mit einer Linie begrentzt wird. Diese Linie ist entweder krumm, oder aus krummen oder geraden Linien allein, oder endlich aus krummen und geraden Linien zugleich, zusammengesetzt, und man nennt sie den Umfang oder Umkreis der Figur (Perimeter, Peripheria): die geraden oder krummen Linien aber, aus welchen der Umkreis zusammengesetzt ist, heissen einzeln genommen, die Seiten der Figur.

Anmerckung.

§. 283. Es ist allen Umkreisen der ebenen Figuren gemeinschaftlich, daß eine durch einen Punct innerhalb der Figur gezogene gerade Linie, wenn man sie verlängert, den Umkreis wenigstens in zween Puncten schneidet. Schneiden aber die Umkreise zwoer Figuren einander, so muß dieses zum wenigsten auch in zween Puncten geschehen.

§. 284. Diejenigen ebenen Figuren, welche in einerley Grentzen dergestalt Platz haben, daß wenn man eine auf die andre leget, die Umkreise in einen zusammenfallen, sind gleich. Deswegen aber sind die Figuren, welche einander nicht decken können, nicht allzeit vor ungleich zu halten; weil ein Stück, das auf der einen Seite hervorragt, auf der andern Seite fehlen kan.

§. 285. Ferner hat eine Figur, welche nicht durch eine einzige krumme Linie, sondern durch mehrere Seiten begrentzt wird, eben so viele Winckel, welche von diesen Seiten eingeschlossen werden, als sie Seiten hat. Eine von diesen Seiten muß, wenn sie eine gerade Linie ist, nothwendig kleiner seyn als der übrige Theil des Umkreises.

Erklärung.

§. 286. Der Cirkel ist eine mit einer einzigen krummen Linie begrentzte ebene Figur. Diese krumme Linie hat die Eigenschaft, daß ein jeglicher Punct in derselben, von einem gewissen Punct innerhalb der Figur gleich weit entfernt ist. Dieser Punct A heißt der Mittelpunct des Cirkels
Fig. 18. (Centrum), und AB, die Entfernung dieses

Puncts

Puncts von einem jeglichen Punct des Umkreises, sein Halbmesser (Radius, Interuallum).

Anmerckung.

§. 287. Der Umkreis des Cirkels ist die zwote Linie, welche bey Lösung der Aufgaben gebraucht wird, und es kommt ausser dieser keine andre krumme Linie in den Anfangsgründen der Geometrie vor; daher werden hier alle vorfallende Arbeiten durch gerade Linien (§. 252.) oder durch die Cirkelkreise verrichtet. Man fordert also daß ein jeder, der sich dieser Wissenschaft widmen will, zu einem gegebenen Mittelpunct und Halbmesser, den Umkreis eines Cirkels zu beschreiben wisse.

§. 288. Wird aber dieser Umkreis beschrieben, so wird eben dadurch von einem gegebenen Punct A in einer Ebene rund herum eine gerade Linie gelegt, welche einer gegebenen geraden Linie AB gleich ist; und hiedurch allein wird eine gerade Linie zu einer andern addiret, und die kleinere von der grössern abgezogen. Denn wenn man um den Mittelpunct B, welcher zugleich der Endigungspunct der Linie AB ist, mit dem Halbmesser $BC = D$ einen Cirkelkreis beschreibet, und hierauf AB bis in E verlängert, so wird $BE = D$, folglich $AE = AB + BE = AB + D$, und $AC = AB - BC = AB - D$. Fig. 19.

§. 289. Dieser Gebrauch des Cirkelkreises machte es nothwendig, die Erklärung desselben schon an dieser Stelle zu geben. Uebrigens wird der Cirkel, als eine Figur mit ihren Theilen, welche durch gerade oder krumme Linien begrenzt sind, hier noch nicht betrachtet.

Erklärung.

§. 290. Eine ebene Figur, deren Seiten alle gerade Linien sind, nennt man eine geradlinichte Figur; die übrigen sind krummlinicht; sie mögen nun durch eine oder mehrere krumme Linien, oder durch krumme und gerade Linien, begrenzt werden.

Anmerckung.

§. 291. Eine ebene geradlinichte Figur hat wenigstens drey Seiten; sie kan aber deren mehrere, ja eine jede Anzahl derselben haben.

§. 292. Es entsteht aber eine jede ebene geradlinichte Figur, wenn man anfangs alle Seiten derselben, eine einzige ausgenommen, nach Willkühr annimmt, und dieselben unter beliebigen Winckeln an
Fig. 20. einander leget; hierauf aber die äusersten Puncte des soweit beschriebenen Umfangs ABC durch die gerade Linie AC verbindet; welche AC den übrigen Theil des Umfangs nicht schneiden muß, wenn man nur eine, und nicht mehrere Figuren haben will.

§. 293 Wenn man aber diese AC ziehet, so erhält die Figur dadurch zween neue Winckel A und C, und eine neue Seite AC, deren Grösse insgesammt, von den angenommen Seiten, und von den

Winckeln, unter denen man diese Seiten aneinander gelegt hat abhängt, und wenn man einige von diesen Dingen verändert, meistentheils zugleich mit verändert wird.

Erklärung.

§. 294. Eine ebene geradlinichte Figur von dreyen Seiten heißt ein Dreyeck (Trilaterum, Triangulum); hat sie vier Seiten, so nennt man sie ein Viereck, hat sie fünf Seiten, ein Fünfeck und so fort. Ueberhaupt aber werden auch die ebenen geradlinichten Figuren von mehr als vier Seiten Vielecke (Polygona) genennt.

Anmerckung.

§. 295. Es entstehet ein Dreyeck, wenn man zwo gerade Linien AB, BC, unter einem beliebigen Winckel B an einander leget, und hierauf AC ziehet. Hieraus sieht man leicht, daß die Seiten eines Dreyecks alle gleich, oder auch alle ungleich seyn können. Fig. 21.

Erklärung.

§. 296. Ein Dreyeck dessen Seiten alle von einer Grösse sind, nennt man ein gleichseitiges Dreyeck; In einem gleichschenckelichten sind nur zwo Seiten von einer Grösse (Aequicrurum, Isosceles), und in diesem heissen die beiden gleichen Seiten die Schenckel, und die dritte

Seite die Grundlinie (B. ii). Sind endlich alle drey Seiten von verschiedner Grösse, so nennt man dieses ein ungleichseitiges Dreyeck (Obliquum, Scalenum).

Lehrsatz.

Fig. 22. §. 297. In einem jeden Dreyeck ABC ist die Summe aller Winckel CAB + B + C zween rechten Winckeln gleich.

Beweis.

Man verlängere BA, und lege an dieselbe den Winckel DAE, dem Winckel B gleich, so wird AE der Seite BC parallel (§. 274.), und der Winckel EAC dem Winckel C gleich seyn (§. 279); folglich ist B + BAC + C = B + BAC CAE Nun aber ist BAC + CAE = BAE, also B + BAC + C = B + BAE, welche zween Winckel B und BAE zusammen, zween rechten Winckeln gleich sind (§. 280.).

Der 1. Zusatz.

§. 298. Durch die Summe zweener Winckel eines Dreyecks wird der dritte Winckel, und durch einen jeden einzelnen Winckel, die Summe der beiden übrigen bestimmt, und man kan also, wenn die Summe zweener Winckel gegeben ist, den dritten Winckel, und wenn ein Winckel bekant ist, die Summe der beiden übrigen finden. Es sey ABC

Fig. 23.

die

die Summe zweener Winckel in einem Dreyeck. Man verlängere BC in D, so ist ABD der dritte Winckel des Dreyecks (§. 269.). Und wenn ABC einem einzelnen Winckel eines Dreyecks gleich ist, so wird ABD die Summe der übrigen Winckel seyn.

Der 2. Zusatz.

§ 299. Wenn einer von den Winckeln eines Dreyecks ein rechter Winckel ist, so ist die Summe der zween übrigen ebenfalls einem rechten Winckel gleich, und jeder insbesondere ist kleiner als ein rechter, folglich ein spitziger Winckel; auch kan in einem Dreyeck nicht mehr als ein rechter Winkel seyn.

Der 3. Zusatz.

§. 300. Wenn aber einer von den Winckeln des Dreyecks stumpf ist, so ist die Summe der beiden übrigen, kleiner als ein rechter Winckel, folgends spitzig. Um desto mehr wird also ein jeder dieser Winckel insbesondere spitzig seyn, und es kan kein Dreyeck zween stumpfe Winckel, oder einen stumpfen und einen rechten Winckel haben.

Der 4. Zusatz.

§ 301. Die Summe von zween Winckeln eines Dreyecks ist kleiner als zween rechte Winckel. Ist diese Summe auch kleiner als ein rechter Winckel, so ist der dritte Winckel stumpf, ist sie einem rechten Winckel gleich, so ist der dritte ein rechter

 Winckel,

Winckel, ist die Summe grösser als ein rechter, so ist der dritte ein spitziger Winckel.

Der 5. Zusatz.

Fig. 24. §. 302. Wenn man eine von dem Seiten des Dreyecks ABC, zum Beyspiel BC, in D verlängert, so ist der äusere Winckel ACD der Summe der beiden inneren ihm entgegenstehenden Winckel A und B gleich. Denn es ist $ACD + ACB = 2R = A + B + ACB$. Wenn man also den gemeinschaftlichen Winckel ACB von der Summe wegnimmt, bleibt $ACD = A + B$.

Lehrsatz.

§. 303. In einer jeglichen ebenen geradlinichten Figur ist die Summe aller Winckel zweymal so vielen rechten Winckeln weniger vieren gleich, als die Figur Seiten hat.

Beweis.

Fig. 25. Wenn aus einem innerhalb der Figur ABCDEFG nach Belieben angenommenen Punct A, die geraden Linien HA, HB, HC rc. an die Spitzen aller Winckel gezogen werden, so entstehen so viele Dreyecke, als die Figur Seiten hat; und in allen diesen Dreyecken sind zweymal so viel rechte Winckel als Dreyecke, sind (§. 297.). Nun aber machen alle Winckel, welche um den Punct

Punct H herumliegen, und zu der Figur nicht gehören, vier rechte Winckel aus (§. 270.). Wenn man also dieselben abzieht, so werden die übrigen Winckel der Dreyecke, deren Summe mit der Summe der Winckel in der Figur einerley ist, zweymal so viele rechte Winckel weniger vier ausmachen, als die Figur Seiten hat.

Zusatz.

§. 304. In einem jeglichen Viereck ist die Summe aller Winckel vier rechten Winckeln gleich, in einem Fünfeck ist die Summe aller Winckel = 6R, in einem Sechseck = 8R, und so weiter; indem bey einer jeden neuen Seite, womit die Anzahl der Seiten der Figur vermehrt wird, die Summe der Winckel um zween rechte Winckel anwächst.

Erklärung.

§. 305. Ein Dreyeck in welchem ein rechter Winckel ist, nennt man ein rechtwincklichtes Dreyeck; ist ein stumpfer Winckel darinnen, so heißt es stumpfwincklicht; und wenn es weder einen rechten noch einen stumpfen Winckel hat, das ist, wenn die Winckel alle spitzig sind, so nennt man das Dreyeck spitzwincklicht.

Erklärung.

§. 306. Ein Viereck dessen gegenüberstehende Seiten parallel sind, heißt ein Parallelogramm.

Anmer-

Anmerckung.

Fig. 26. §. 307. In einem Parallelogramm sind jede zween Winckel die eine gemeinschaftliche Seite haben, als A, B, zween rechten Winckeln gleich (§. 28..).

§. 308 Hieraus folgt, daß die gegenüberstehenden Winckel in einem Parallelogramm einander gleich sind, A = C und B = D, weil nehmlich A + B = A + D

§. 309 Wenn ein Parallelogramm einen rechten Winckel A hat, so sind alle Winckel desselben von eben der Art; der Winckel B ist ein rechter, weil A + B = 2R, die Winckel C und D aber deswegen, weil sie rechten Winckeln gegenüberstehen.

§. 310 Wenn in einem Parallelogramm ein schiefer Winckel ist, so sind sie alle schief. Denn wäre ein rechter darunter, so würde auch der zuerst als schief angenommene, ein rechter Winckel seyn.

Erklärung.

§. 311. Ein Parallelogramm welches vier rechte Winckel hat, heißt ein rechtwincklichtes Viereck oder ein Rechteck (Rectangulum). Sind in demselben auch alle vier Seiten einander gleich, so ist es ein Quadrat.

Lehrsatz.

Fig. 27. §. 312. Wenn in einem Dreyeck ABC, einer der Winckel B, dem Winckel b eines andren Dreyecks abc gleich ist, und es sind auch die

Seiten

Seiten welche diese Winckel einschliessen von einerley Grösse, AB = ab und BC = bc; so sind auch die übrigen Seiten beider Dreyecke AC = ac, und die übrigen Winckel welche zwischen gleichen Seiten liegen A = a und C = c, und die Dreyecke selbst, einander gleich.

Beweis.

Denn wenn man mit der Seite bc die Seite BC decket, indem das Punct b in B fällt, so wird auch der Winckel b den Winckel B, und die Seite ba die Seite BA decken. Folglich deckt auch die Seite ac die Seite AC, der Winckel a den Winckel A, der Winckel c den Winckel C, und das gantze Dreyeck abc das gantze Dreyeck ABC.

Der 1. Zusatz.

§. 313. Wenn bey eben diesen Dreyecken auch AB = BC folglich ab = bc, das ist, wenn die Dreyecke gleichschencklicht sind, so können die Dreyecke einander nicht nur decken, wenn man bc auf BC, sondern auch wenn ba auf BC legt. Es wird also nicht allein der Winckel C dem Winckel c gleich seyn, sondern auch A = c, und hieraus C = A; das ist, es sind in einem jeglichen gleichschencklichten Dreyeck, die Winckel an der Grundlinie einander gleich.

Der 2. Zusatz.

Fig. 28. §. 314. Wenn in einem gleichschencklichten Dreyeck ABC, dessen Grundlinie BC ist, ein Winckel gegeben wird, so sind sie alle bekannt Denn wenn B gegeben ist, so kennt man auch den ihm gleichen Winckel C, und hieraus den dritten A. Ist aber A gegeben, so weis man die Summe der übrigen Winckel B + C (§. 298), und die Helfte dieser Summe ist der Winckel B oder C.

Der 3. Zusatz.

§. 315. In einem gleichseitigen Dreyeck sind alle Winckel gleich. Folglich macht ein jeder insbesondre so viel aus, als zwey Drittheile von einem rechten Winckel.

Lehrsatz.

Fig. 29. §. 316. Wenn zween Winckel eines Dreyecks ABC zween Winckeln eines andern Dreyecks abc gleich sind, und eine Seite des ersteren ist einer Seite des lezteren gleich, welche auf eben die Art an dem gleichen Winckel liegt; so werden auch die übrigen Seiten der Dreyecke, welche zwischen gleichen Winckeln liegen, und die Dreyecke selbst einander gleich seyn.

Beweis.

Es sey der Winckel A dem Winckel a gleich, und B = b, so ist BCA = c (§. 298.). Es sey aber auch

auch die Seite BC der Seite bc gleich, welche Seiten auf einerley Art an den gleichen Winckeln liegen: so sage ich es wird BA = ba seyn. Denn wenn dieses nicht wäre, so sey BD = ba. Weil nun B = b und BC = bc, so wäre auch der Winckel DCB dem Winckel c gleich (§. 312.). Es ist aber auch ACB = c, folglich DCB = ACB, welches nicht seyn kan. Also ist AB = ab, und hieraus AC = ac (§. 312.), und das Dreyeck ABC dem Dreyeck abc gleich.

Der 1. Zusatz.

§. 317. In dem Dreyeck ABC, in welchem die zween Winckel B und C einander gleich sind, sind auch die Seiten, welche an diesen Winckeln liegen AB, AC gleich, und das Dreyeck ist gleichschencklicht. Denn es wird eben den Raum einnehmen, wenn man es umkehret, so daß der Punct C an die Stelle des Puncts B, und B an die Stelle des Puncts C komt. Fig. 28.

Der 2. Zusatz.

§. 318. Folglich ist ein Dreyeck in welchem alle Winckel gleich sind, auch gleichseitig.

Lehrsatz.

§. 319. Dreyecke, deren Seiten gleich sind, sind selbst gleich, und es sind in denselben auch

auch diejenigen Winckel gleich, welche von gleichen Seiten eingeschlossen werden.

Beweis.

Fig. 30. 31. Es seyn die Dreyecke ABC, ABD, deren Seiten gleich sind, AB = AB, AC = AD, BC = BD, dergestalt an einander gelegt, wie dieses in den Zeichnungen erscheinet. Man ziehe CD, so werden die Dreyecke CAD, CBD gleichschencklicht; folglich ist der Winckel ACD dem Winckel ADC, und der Winckel DCB dem Winckel CDB gleich (§. 313.). Es sind also auch die Winckel ACB, ADB, als die Summen oder Differenzen der eben benannten Winckel einander gleich; und es werden in den Dreyecken ACB, ADB die gleichen Winckel ACB, ADB von den gleichen Seiten AC = AD und BC = BD eingeschlossen. Hieraus ist der Satz offenbar (§. 312.).

Aufgabe.

§. 320. Aus dreyen gegebenen Seiten, deren jegliche zwo zusammengenommen grösser sind als die dritte, ein Dreyeck zu beschreiben.

Auflösung.

Fig. 32. Es seyn die gegebenen Seiten A, B, C. Man mache in einer ungeendigten geraden Linie,

DE=A, DF=B und EG=C. Hierauf beschreibe man aus den Mittelpuncten D und E, mit den Halbmessern DF, EG, zween Cirkelkreise, welche einander schneiden werden, weil die Seiten so angenommen worden sind, daß EG+FD grösser ist als DE, und wiederum FD+DE, grösser als EG, wie auch DE+EG grösser als FD. Schneiden sich nun diese Cirkelkreise in H, so ziehe man HD, HE, und es wird DHE das verlangte Dreyeck seyn.

Beweis.

Denn es ist HD=DF=B, und HE=EG =C, DE aber ist =A.

Der 1. Zusatz.

§. 321 Wenn zwo der gegebenen Seiten einander gleich sind, wird das Dreyeck gleichschencklicht: ein solches kan also auf jede gegebene Grundlinie beschrieben werden, wenn der eine zugleich gegebene Schenckel grösser ist, als die Helfte dieser Grundlinie.

Der 2. Zusatz.

§. 322. Wenn die Seiten A, B, C alle gleich sind, das ist, wenn anstatt aller Seiten eine einzige gegeben ist, so wird das Dreyeck gleichseitig.

Auf-

Aufgabe.

Fig. 33. §. 323. An eine gegebene gerade Linie AB, und einen in derselben bestimmten Punct A, einen Winckel zu legen, welcher einem gegebenen Winckel C gleich sey.

Auflösung.

Man nehme CD, CE nach Willkühr, und vollende das Dreyeck CDE. Hierauf beschreibe man auf die gerade Linie AB, von dem gegebenen Punct A an, ein Dreyeck, in welchem sey AF = CD, AG = CE und GF = ED, (§. 320.).

Beweis.

Denn es ist in den Dreyecken GAF, ECD, welche gleiche Seite haben, der Winckel A dem Winckel C gleich, (§. 319.).

Aufgabe.

Fig. 34. §. 324. Wenn eine gerade Linie AB in einer Ebene gezogen ist, derselben durch einen in eben dieser Ebene bestimten Punct C eine Parallellinie zu ziehen.

Auflösung.

Man ziehe durch den Punct C die gerade Linie ED, welche die Linie AB irgendwo antreffe. Hierauf

auf mache man den Winckel ECF, oder auch den Winckel GCD dem Winckel EDB gleich.

Beweis.

Die geraden Linien GF, AB, werden von einer dritten ED, unter gleichen Winckeln ECF, EDB, oder GCD, EDB geschnitten, folglich sind sie parallel (§. 274. 275.).

Der 1. Zusatz.

§. 325. Es wird also auch aus einem jeden gegebenen Winckel B, und zwo Seiten AB, BC, ein Parallelogramm beschrieben, wenn man der Seite BC die AD, und der Seite AB die DC parallel ziehet: beides aber kan auf einmal geschehen, wenn man das Dreyeck ABC vollendet, und auf AC ein neues Dreyeck setzet, dessen Seite AD der Seite BC gleich sey, und DC=AB. Denn es sind in diesem Fall auch die Winckel ACB = DAC, und BAC =DCA (§. 319). Fig. 35

Der 2. Zusatz.

§. 326. Hieraus sieht man, daß ein jegliches Viereck, dessen gegenüberliegende Seiten einander gleich sind, AD=BC, und zugleich AB=CD, ein Parallelogramm sey.

Der 3. Zusatz.

§. 327. Wenn B ein rechter Winckel ist, so wird durch das eben beschriebene Verfahren ein Rechteck hervorgebracht. Und ist außerdem die gegebene Seite AB der andern BC gleich, so wird dieses Rechteck ein Quadrat (§. 311.): man kan also auf eine jede gegebene Seite ein Quadrat setzen.

Aufgabe.

Fig. 36. §. 328. **Einen gegebenen Winckel ABC zu halbiren, oder in zween gleiche Winckel zu theilen.**

Auflösung.

Man schneide von den Schenckeln BA, BC, die gleichen Stücke BD, BE ab. Hierauf ziehe man DE, und setze auf diese DE als eine Grundlinie, das gleichschencklichte Dreyeck DEF, auf eine oder die andre Seite; endlich ziehe man BF.

Beweis.

Weil die Seiten des Dreyecks DBF, den Seiten des Dreyecks EBF gleich sind, so sind auch die Winckel in beyden Dreyecken bey B, welche zusammengenommen den Winckel ABC ausmachen, einander gleich (§. 319.).

Der 1. Zusatz.

Fig. 37. §. 329. Auf eben diese Art kan man auch auf eine gerade Linie, durch einen in derselben gegebenen Punct B, eine andre gerade Linie senckrecht ziehen, weil diese senckrechte Linie den Winckel ABC, welcher

welcher zween rechten Winckeln gleich ist, in zween gleiche Winckel theilen wird. Macht man daher BD = BE, und setzet auf DE das gleichschencklichte Dreyeck DFE, so wird die gerade Linie FB auf AC senckrecht stehen.

Der 2. Zusatz.

§. 330. Und weil, wegen der erwiesenen Gleichheit der Seiten, die Dreyecke FDB, FBE selbst, folglich auch die übrigen Winckel derselben, welche zwischen gleichen Seiten liegen, gleich sind; so wird eben die gerade Linie, welche man aus der Spitze des gleichschencklichten Dreyecks DFE dergestalt gezogen hat, daß sie die Grundlinie DE in zween gleiche Theile theilet, nicht nur auf dieser Grundlinie senckrecht stehen, sondern zugleich das gantze Dreyeck sowohl, als auch den der Grundlinie entgegengesetzten Winckel halbiren.

Der 3. Zusatz.

§. 331. Auch theilet die aus der Spitze F auf die Grundlinie senckrecht gezogene gerade Linie, diese Grundlinie allzeit in zwo gleiche Helften. Denn wäre dieses nicht, so würde diese senckrechte Linie nicht in die Linie FB fallen, welche die Grundlinie halbiret; folglich wären aus dem Punct F der Grundlinie zwo Linien senckrecht gezogen, FB, und die andre von welcher die Rede ist, welches nicht seyn kan (§. 262.).

Aufgabe.

Fig. 38. §. 332. Eine gegebene gerade Linie AB in zwey gleiche Theile zu theilen.

Auflösung.

Man beschreibe auf die gegebene AB ein gleichschencklichtes Dreyeck ABC; hierauf halbire man den der Grundlinie gegenüberstehenden Winckel (§. 328.), und verlängere CD, bis sie auch die AB schneidet.

Beweis.

Denn wenn der Winckel ACD dem Winckel BCD gleich gemacht wird, so werden, weil AC = CB und CD = CD, auch die übrigen Seiten der Dreyecke CAD, CBD gleich (§. 312.), nehmlich AD = DB.

Zusatz.

§. 333. Durch eben dieses Verfahren, wird auch das Dreyeck CDA dem Dreyeck CDB, und der Winckel CDA dem Winckel CDB gleich. Es wird also eine gerade Linie CD, welche den in einem gleichschencklichten Dreyeck, der Grundlinie entgegenstehenden Winckel halbiret, ausser der Grundlinie, auch das Dreyeck in zwo gleiche Helften theilen, und auf der Grundlinie senckrecht stehen.

Auf-

Aufgabe.

§. 334. *Einer gegebenen geraden Linie, aus einem auserhalb derselben bestimmten Punct eine Linie senckrecht zu ziehen.*

Auflösung.

Es sey die gerade Linie AB, der Punct C. Fig. 39.
Man nehme einen Punct D auf der andern Seite der Linie AB, und beschreibe aus dem Mittelpunct C mit dem Halbmesser CD einen Cirkelkreis, welcher die gerade Linie AB in den Puncten E, F schneiden wird. Man ziehe CE, CF, und nachdem man den Winckel ECF durch die gerade Linie CG halbiret hat, verlängere man diese Linie, bis sie die gerade Linie AB erreichet.

Beweis.

Weil die beiden Halbmesser des Cirkels, CE, CF einander gleich sind, ist das Dreyeck ECF gleichschencklicht, und die gerade Linie CG, welche den der Grundlinie entgegengesetzten Winckel halbiret, steht auf dieser Grundlinie senckrecht (§. 333.).

Lehrsatz.

§. 335. *In einem jeden Dreyeck liegt die grössere Seite dem grösseren Winckel gegenüber.*

Beweis.

Fig. 40. Es sey in dem Dreyeck ABC der Winckel ABC grösser als der Winckel C: so wird behauptet daß die Seite AC grösser sey als die Seite AB. Denn wenn man den Winckel DBC dem Winckel C gleich macht, so ist DB = DC (§. 317.), und wenn man zu beiden Seiten AD addiret, wird AD + BD = AD + DC. Nun ist aber AD + BD die Summe zwoer Seiten in dem Dreyeck, ABD welche nothwendig grösser ist, als die dritte Seite desselben AB (§. 285.); folglich ist auch AD + DC, oder die Seite AC, grösser als die Seite AB.

Der 1. Zusatz.

§. 336. In einem rechtwincklichten Dreyeck ist die dem rechten Winckel gegenüberliegende Seite die größte Seite des Dreyecks: in einem stumpfwincklichten Dreyeck ist diejenige Seite die größte, welche dem stumpfen Winckel entgegensteht.

Der 2. Zusatz.

Fig. 41. §. 337. Wenn man also, aus einem auserhalb der geraden Linie AB gegebenen Punct C, auf dieselbe eine gerade Linie CD senckrecht herabfallen läßt, so ist diese die kürtzeste von allen geraden Linien, welche, so wie CE, von eben diesem Punct C an die gerade Linie AB gezogen werden können. Denn es ist CE in dem rechtwincklichten Dreyeck CDE dem

dem rechten Winckel entgegengesetzt, folglich grös-
ser als CD.

Der 3. Zusatz.

§. 338. Wenn man ausser CE, noch eine andre gerade Linie CF aus C nach AB ziehet, welche sich von der senckrechten Linie CD noch weiter entfernet, als sich CE von derselben entfernte, so wird CF grösser seyn als CE. Denn es ist der Winckel CED des rechtwincklichten Dreyecks spitzig, folglich sein Nebenwinckel CEF stumpf, und es liegt CF in dem stumpfwincklichten Dreyeck CEF dem stumpfen Winckel gegenüber.

Der 4. Zusatz.

§. 339. Also kan man ausser der Linie CE keine Linie von eben der Grösse, von dem Punct C an die Linie AB, auf eben der Seite der senckrechten Linie CD ziehen. Denn auf der andern Seite wird, wenn man DG = DE macht, auch CG = CE. Ausser dieser CG aber kan auch auf dieser Seite, keine Linie aus dem Punct C nach AB gezogen werden, welche der geraden Linie CE gleich wäre. Folglich kan man überhaupt, von einem Punct C an eine gegebene Linie AB, nicht mehr als zwo gerade Linien von einer Grösse ziehen.

Der 5. Zusatz.

§. 340. Wenn man CG auf die gerade Linie AB schief gezogen hat, so können aus dem Punct C zwo einander gleiche gerade Linien nach AB gezogen werden, welche kleiner sind als CG, und beide auf einer Seite derselben liegen. Eine von diesen wird innerhalb des Winckels GCD, die andere innerhalb des Winckels DCE fallen.

Der 6. Zusatz.

§. 341. Hingegen kan man aus dem Punct C nach AB nicht zwo einander gleiche gerade Linien ziehen, welche grösser wären als CG, und doch beide auf einerley Seite derselben fielen. Denn wenn man annimmt, daß eine von diesen Linien CF sey, so wird die andre auf die Seite A der Linie CG fallen.

Der 7. Zusatz.

§. 342. Ist also ein Winckel CGB, die an demselben liegende Seite CG, und noch eine Seite gegeben, welche diesem Winckel gegen über liegen soll, so kan man hieraus kein Dreyeck zusammensetzen, wenn die dem Winckel CGB entgegenzusetzende Seite kleiner ist, als die senckrechte Linie CD. Ist aber diese Seite der Linie CD gleich, so kan man ein Dreyeck beschreiben; ist sie grösser als diese, aber

aber kleiner als die Seite CG, so kan man zwey beschreiben, und endlich wiederum nur ein einziges, wenn die Seite welche dem Winckel CGB gegenüberliegen soll, der CG entweder gleich oder grösser ist als dieselbe.

Der 8. Zusatz.

§. 343. Wenn in einem rechtwincklichten Dreyeck ABC, die gröste Seite einerley bleibt, und eine von den übrigen Seiten abnimmt, so wächst die andre. Denn wenn aus BC, BD wird, so ist, wenn man AD ziehet, dieselbe kleiner als AC; folglich wird die der grösten Seite AC gleiche Linie DE, welche von dem Punct D an die Linie BE gezogen ist, ausserhalb der AD fallen, und BE grösser machen als BA. Fig. 42.

Lehrsatz.

§. 344. Wenn in den rechtwincklichten Dreyecken ABC, abc, die Seiten welche einen von den spitzigen Winckeln einschliessen, gleich sind, AB = ab und AC = ac, so sind auch die übrigen Seiten beider Dreyecke, und die Winckel welche gleichen Seiten entgegen stehen, und die Dreyecke selbst gleich. Fig. 43.

Beweis.

Denn wenn die Seiten BC, bc nicht gleich sind, so ist eine kleiner als die andre. Es sey also bc kleiner als BC, so ist, weil ac = AC, nothwendig ab grösser als AB, welches aber demjenigen zuwider ist, was wir angenommen haben. Es sind also die Seiten der Dreyecke BC, bc nicht ungleich. Hieraus ist das übrige klar.

Anmerckung.

§. 345. Dieser Satz, nebst dem letzten Zusatze des vorhergehenden, sind auch richtig, wenn gleich das Dreyeck ABC nicht rechtwincklicht ist; nur muß die dem Winckel B gegenüberstehende Seite AC, nicht kleiner seyn als die Seite AB, welche an diesem Winckel liegt. Es wächst nehmlich auch in diesem Fall AB allzeit, wenn BC abnimmt, indem AC unverändert bleibt, und es können zwey dergleichen Dreyecke, in welchen die Winckel wie B, b und die benannten Seiten welche diese Winckel nicht einschliessen, gleich sind, allzeit einander decken. Man braucht aber diese Sätze zu selten, als daß es nöthig wäre, sich dabey aufzuhalten.

Dritter Abschnitt.
Von dem Cirkel.

Erklärung.

§. 346.

Die gerade Linie AB, welche zween Puncte eines Cirkelkreises verknüpfet, heißt die Sehne (Chorda, Subtensa) der Theile ACB, ADB, in welche sie den Umkreis theilet, und diese Theile heissen die Bogen der Sehne (Arcus). Die Sehne CD welche durch den Mittelpunct E geht, ist der Durchmesser des Cirkels (Diameter). Da nun derselbe doppelt so groß ist als der Radius, so wird dieser auch der halbe Durchmesser (Semidiameter) genennt. Fig. 44.

Anmerckung.

§ 347 Man mag die Sehne AB verlängern, wie man will, so wird sie den Cirkel nicht wieder antreffen. Denn wenn sie denselben noch einmal in D schnitte, so wären die drey aus dem Mittelpunct nach AD gezogene gerade Linien CA, CB, CD, als Halbmesser von einem Cirkel, einander gleich; welches nicht seyn kan (§. 339.) weil sie sich alle in der geraden Linie AB endigen. Es kan also der Umkreis Fig. 45.

kreis des Cirkels nicht durch drey Puncte einer geraden Linie gehen.

Erklärung.

Fig. 46. §. 348. Die Theile wie ACBA, ADBA, in welche die Sehne den Cirkel theilet, heissen Abschnitte (Segmenta). Schneidet aber ein Durchmesser eines Cirkels, AB, einen andern Durchmesser eben dieses Cirkels, CD, so nennt man die Figur welche durch die beiden Halbmesser AE, ED, und den Bogen AD oder ACBD begrenzt wird, einen Ausschnitt (Sector).

Lehrsatz.

§. 349. Cirkel, deren Halbmesser gleich sind, sind selbst einander gleich; auch sind die Abschnitte derselben, deren Sehnen Durchmesser sind, sowol als die Ausschnitte, deren Winckel bey dem Mittelpunct einerley Grösse haben, wie auch die Umkreise, oder die Bogen, welche diese gleichen Cirkel, oder gleiche Abschnitte und Ausschnitte begrenzen, einander gleich. Sind aber die Winckel der Ausschnitte, welche mit einerley Halbmessern beschrieben worden, ungleich, so sind auch die Bogen derselben, und die Ausschnitte selbst ungleich.

Beweis.

Beweis.

Denn wenn der Mittelpunct eines von zween gleichen Cirkeln, auf den Mittelpunct des andern fällt, so decken die Cirkel einander, man mag sie um diese Mittelpuncte drehen wie man will. Wenn man sie daher so lange drehet, biß einige von den in denselben gezogenen Halbmessern einander decken, so wird alles klar was hier behauptet worden ist.

Der 1. Zusatz.

§. 350. Ein jeder Durchmesser theilt den Cirkel sowohl, als den Umkreis desselben in zwey gleiche Theile. Zween Durchmesser aber, welche auf einander senckrecht stehen, theilen den Cirkel sowohl als seinen Umkreis, in vier Viertheile oder Quadranten.

Der 2. Zusatz.

§. 351. Wenn zween Ausschnitte von solchen Cirkeln, die mit gleichen Halbmessern beschrieben worden, oder die Bogen derselben, gleich sind, so sind auch die Winckel der Ausschnitte beym Mittelpunct einander gleich. Denn wenn diese Winckel ungleich wären, so würden die Ausschnitte selbst und ihre Bogen ungleich seyn.

Der 3. Zusatz.

§. 352. Wenn der Bogen eines Ausschnittes in eine Anzahl gleicher Theile getheilt wird, und man zieht von jedem dieser Theilungspuncte, Halbmesser an dem Mittelpunct, so wird der Winckel des Ausschnittes in eben so viele gleiche Theile getheilet. Und umgekehrt, wenn der Winckel in gleiche Theile getheilet ist, und man verlängert die Linien, welche ihn theilen, so wird der Bogen in eben so viele gleiche Theile getheilet, als der Winckel.

Lehrsatz.

§. 353. Wenn man aus dem Mittelpunct des Cirkels, auf eine Sehne desselben, eine gerade Linie senckrecht ziehet, so wird die Sehne durch diese gerade Linie halbiret; und umgekehrt, steht eine Linie welche die Sehne halbiret und durch den Mittelpunct geht, auf der Sehne senckrecht. Halbiret sie die Sehne, und steht senckrecht auf derselben, so geht sie auch durch den Mittelpunct, und wenn man sie gehörig verlängert, halbiret sie auch beide Bogen der Sehne.

Beweis.

Fig. 47. Es sey in einem Cirkel, dessen Mittelpunct A ist, eine Sehne BC gezogen. Man ziehe die Halbmesser AB, AC, so ist das Dreyeck ABC gleichschencklicht, und in demselben ist BC die Grundlinie, und BAC der dieser Grundlinie entgegen-

genstehende Winckel. Es wird also die gerade Linie AE, welche aus dem Mittelpunct A der Sehne senckrecht gezogen ist, dieselbe halbiren (§. 331.) oder wenn man setzet, daß sie durch den Mittelpunct gehe, und die Sehne halbire, wird sie auch auf derselben senckrecht stehen (§. 330.).

Wenn ferner, die gerade Linie welche auf der Sehne senckrecht stehet, und dieselbe halbiret, nicht durch den Mittelpunct gehen solte, so setze man sie fiele in EF, und man ziehe alsdenn auch AE aus dem Mittelpunct des Cirkels nach dem Theilungspunct E der Linie BC; so wird ausser der EF auch die AE in eben dem Punct E auf der Sehne senckrecht stehen, welches nicht seyn kan.

Endlich so wird diese AE, welche die Grundlinie BC des gleichschencklichten Dreyecks ABC in zwey gleiche Theile theilet, auch den Winckel des Ausschnittes BAC halbiren (§. 330.); folglich wird sie auch den Bogen BDC dergestalt schneiden, daß BD dem DC gleichet (§. 352.). Wenn man daher AE in G verlängert, so ist, weil GBD = GCD auch GBD — BD = GCD — CD, das ist, GB = GC.

Der 1. Zusatz.

Fig. 48. §. 354. Es wird also ein gegebener Cirkelbogen ADB halbiret, wenn man die Sehne desselben AB durch eine senckrechte Linie CD in zwey gleiche Theile theilet. Denn diese verlängerte Linie CD halbiret auch den Bogen in D.

Der 2. Zusatz.

Fig. 49. §. 355. Und wenn der Mittelpunct eines Cirkels unbekannt ist, so ziehe man eine Sehne AB in demselben nach Willkühr, und theile sie durch eine senckrechte Linie CD in zwey gleiche Theile, so wird diese CD durch den Mittelpunct gehen. Halbiret man also auch diese CD in dem Punct E, so ist der Mittelpunct des Cirkels gefunden.

Aufgabe.

§. 356. Durch drey gegebene Puncte, welche nicht in einer geraden Linie liegen, den Umkreis eines Cirkels zu beschreiben.

Auflösung.

Fig. 50. Es seyn die drey gegebenen Puncte A, B, C. Man ziehe AB und BC, und nachdem eine jede dieser Linien in D, E halbiret worden ist, stelle man auf dieselben die senckrechten Linien DF und EF, welche man verlängert bis sie einander in F

schnei-

schneiden. Hierauf beschreibe man den Cirkelkreis um den Mittelpunct F, mit dem Halbmesser FA.

Beweis.

Man ziehe AF, BF, CF; so werden wegen der rechten Winckel bey D, und weil AD = DB und DF = DF, in den Dreyecken ADF, BDF, die Seiten AF, BF gleich seyn: und aus eben diesem Grunde ist die Seite BF des Dreyecks BEF, der Seite CF des Dreyecks EFC gleich. Folglich wird der Cirkelkreis welcher um den Mittelpunct F durch A beschreiben wird, auch durch die Puncte B und C gehen.

Der 1. Zusatz.

§. 357. Es können durch drey gegebene Puncte A, B, C, nicht zween verschiedne Cirkelkreise gehen. Denn wenn man setzt, daß dieses geschehen könte, so wäre AB eine gemeinschaftliche Sehne beider Cirkelkreise, folglich fiele der Mittelpunct von beiden in DF (§. 353.). Es wäre aber auch BC eine gemeinschaftliche Sehne dieser beiden Cirkelkreise: folglich würde beider Mittelpunct in F fallen, und ausserdem würden sie, da ein jeder von denselben durch A beschrieben werden soll, beide einerley Halbmesser haben. Es sind also diese Cirkelkreise nicht verschieden, sondern sie fallen in einen zusammen.

Der 2. Zusatz.

§. 358. Man wird also auch zu einem jeden gegebenen Theil von dem Umkreise eines Cirkels, den Mittelpunct desselben finden, wenn man zu drey in diesem Theile des Umkreises nach Willkühr angenommenen Puncten, den Mittelpunct suchet.

Lehrsatz.

§. 359. In einerley, oder in gleichen Cirkeln, sind die Sehnen, welche gleich weit von dem Mittelpunct entfernt sind, einander gleich: ist aber ihre Entfernung von dem Mittelpunct ungleich, so ist diejenige Sehne die grössere, welche dem Mittelpunct am nächsten liegt, und die, welche am weitsten von demselben entfernt ist, die kleinere.

Beweis.

Fig. 51. Es seyn in einem Cirkel, dessen Mittelpunct A ist, den Sehnen BC, DE, die Linien AF, AG aus dem Mittelpunct senckrecht gezogen, so werden diese Linien zugleich die Entfernungen der Sehnen von dem Mittelpunct ausdrücken, und dieselben in zwey gleiche Theile theilen (§. 353.). Man ziehe auch die Halbmesser AB, AE. So sind BAF, EAG rechtwincklichte Dreyecke, und die größten Seiten derselben AE, AB, sind gleich. Wenn also AF=AG, so ist auch BF=EG, und

CB = DE (§. 344). Ist aber AF grösser als AG, so wird FB kleiner als EG (§. 343.) und CB, welche zweymahl so groß ist als FB, auch kleiner als ED, welche zweymahl so groß ist als EG.

Der 1. Zusatz.

§. 360. Eine jede Sehne fällt innerhalb des Cirkels. Denn es ist der Halbmesser AB welcher in dem rechtwincklichten Dreyeck AFB dem rechten Winckel gegenüber liegt, grösser als AF (§. 336.): und die Sehne schneidet den Umkreis des Circkels nur in zween Puncten (§. 347.).

Der 2. Zusatz.

§. 361. Die größte der Sehnen in einem Cirkel ist der Durchmesser desselben, weil sich dieser von dem Mittelpunct gar nicht entfernet. Die übrigen Sehnen werden, wenn man sie dem Durchmesser parallel ordnet, desto kleiner, je kleiner die Abschnitte sind, welche sie von dem halben Cirkel wegnehmen, und je kleinere Bogen sie von dem halben Umkreise abschneiden.

Der 3. Zusatz.

§. 362. Die Bogen welche zwischen zwo parallel gezogenen Sehnen AB, CD eines Cirkels liegen, sind einander gleich. Denn wenn man aus dem Mittelpunct E, der Sehne AB eine gerade Linie senckrecht ziehet, und dieselbe verlängert bis sie den Umkreis Fig. 52.

kreis in F schneidet; so wird diese EF auch auf der Sehne CD senckrecht stehen (§. 281.); folglich FA=FB und FC=FD seyn (§. 353.). Wenn man also diese letzten Bogen von den ersten abzieht, bleibt AC=BD.

Lehrsatz.

§. 363. Gleiche Sehnen theilen einerley oder gleiche Cirkel, und die Umkreise derselben, in gleiche Abschnitte und gleiche Bogen: und wenn man gleiche Bogen von gleichen Cirkeln nimmt, so sind auch die Sehnen von diesen Bogen einander gleich.

Beweis.

Fig. 53. Nachdem in den gleichen Cirkeln, deren Mittelpuncte A und B sind, die Sehnen CD, EF gezogen worden, ziehe man auch die Halbmesser AC, AD, BE, BF, welche alle einauder gleich seyn werden. Wenn also

1) Die Sehne CD der Sehne EF gleich ist, so sind auch die Dreyecke und die Winckel CAD, EBF, einander gleich, folglich auch der Bogen CGD dem Bogen EIF, und der Ausschnitt CAD dem Ausschnitt EBF (§. 349.), wie auch, wenn man an beiden Orten die gleichen Dreyecke abzieht, der Abschnitt CGD dem Abschnitt EIF.

Hieraus

Hieraus folgt ferner, daß auch der Abschnitt CHD dem Abschnitt EKF, und der Bogen CHD dem Bogen EKF gleich seyn werde. Wenn aber 2) der Bogen CGD dem Bogen EIF gleich ist, so ist der Winckel A dem Winckel B gleich, und es sind in den Dreyecken CAD, BEF, auch die übrigen Seiten CD, EF, einander gleich.

Zusatz.

§. 364. Man wird also von einem gegebenen Cirkelkreise einen Bogen abschneiden, welcher einem andern gegebenen Bogen eben dieses Kreises gleich ist, wenn man die Sehne des gesuchten Bogen so groß macht, als die Sehne des gegebenen.

Erklärung.

§. 365. Wenn eine gerade Linie, nachdem sie durch einen Punct des Umkreises gegangen ist, gantz auser dem Cirkel fällt, so sagt man, sie berühre den Cirkel, und man nennt sie eine Tangente desselben.

Aufgabe.

§. 366. Durch einen gegebenen Punct in dem Umkreise, eine gerade Linie zu ziehen, welche den Cirkel berühre.

Auflösung.

Fig. 54. Es sey in dem Umkreise des Cirkels, dessen Mittelpunct A ist, der Punct B gegeben. Man ziehe durch A und B die gerade Linie AC, und stelle auf dieselbe durch den Punct B die Linie DE senckrecht; so wird diese den Cirkel in B berühren.

Beweis.

Denn es geht die Linie DE durch den Punct B des Umkreises. Wenn man aber AF nach Willkühr ziehet, so wird das Dreyeck ABF rechtwincklicht, folglich AF grösser, als der Halbmesser des Cirkels AB. Und es fällt ein jeder Punct F der geraden Linie DE ausserhalb des Cirkels.

Zusatz.

§. 367. Es ist also nur ein einziger Berührungspunct B, und es kan kein Theil des Umkreises, so klein man ihn auch annehmen mag, mit einem Theile der geraden Linie DE zusammenfallen.

Lehrsatz.

§. 368. Wenn eine gerade Linie einen Cirkel berühret, so stehet der Halbmesser, welcher von dem Mittelpunct nach dem Berührungspuncte gezogen wird, senckrecht auf der Tangente: und wenn man aus dem Mittelpunct

telpunct eine gerade Linie senckrecht auf die Tangente ziehet, fällt dieselbe in den Berührungspunct.

Beweis.

Die gerade Linie DE berühre einen Cirkel dessen Mittelpunct A ist, in B, und es sey 1) AB gezogen. Wenn diese auf der Tangente nicht senckrecht stehet, so stelle man eine andre gerade Linie AF auf dieselbe senckrecht. In diesem Fall wird AFB ein rechter Winckel, und der Halbmesser AB wird grösser als AF. Es fällt also der Punct F in den Cirkel, welches der Erklärung der Tangente zuwiderläuft. (§. 365.). Wenn aber 2) die gerade Linie, welche aus dem Mittelpunct auf die Tangente senckrecht gezogen ist, nicht in den Berührungspunct B fiele, sondern in einen andern Punct F, so wurde man, ausser der AF noch die AB aus eben dem Punct A auf die Tangente senckrecht ziehen können, welches nicht seyn kan.

Zusatz.

§. 369. Es kan nur eine einzige gerade Linie gezogen werden, welche einen Cirkel in einem gegebenen Punct berühre.

Lehrsatz.

§. 370. In einerley Cirkel, ist ein Winckel bey dem Mittelpunct zweymal so groß, als

 ein

ein Winckel bey dem Umkreise, welcher auf eben dem Bogen stehet.

Beweis.

Der Mittelpunct des Cirkels fällt entweder in einen Schenckel des Winckels am Umkreise, oder innerhalb dieses Winckels, oder auserhalb desselben.

Fig. 55. Es falle zuerst der Mittelpunct A in den Schenckel BC des Winckels am Umkreise BCD, welcher auf eben dem Bogen BD stehet, auf welchem der Winckel BAD bey dem Mittelpunct steht. So ist das Dreyeck DAC gleichschencklicht, und der Winckel C dem Winckel D gleich. Da nun auch der äusere Winckel DAB den beiden innern C + D gleich ist (§. 302.), so ist DAB = 2C.

Fig. 56. Es falle 2) der Mittelpunct A innerhalb des Winckels am Umkreise BCD, und es sey der Winckel bey dem Mittelpunct BAD: so ist, wenn man CA ziehet und in E verlängert, BAE = 2BCE, und EAD = 2ECD, folglich BAD = 2BCD.

Fig. 57. Fällt 3) der Mittelpunct A ausserhalb des Winckels bey dem Umkreise BCD, und es ist der Winckel am Mittelpunct BAD, so ziehe man abermals CA, und verlängere sie in E. In diesem Fall ist EAB = 2ECB und EAD = 2ECD. Zieht man also die ersteren Winckel von den letzteren ab, so bleibt BAD = 2BCD.

Der

Der 1. Zusatz.

§. 371. Die Winckel am Umkreise von einerley Cirkel, sind einander gleich, wenn sie auf gleichen Bogen stehen. Auch sind die Winckel in gleichen Abschnitten von einem Cirkel einander gleich.

Der 2. Zusatz.

§. 372. Der Winckel am Umkreise, welcher auf dem halben Umkreise steht, ist ein rechter Winckel; ist der Bogen grösser als der halbe Umkreis, so ist der Winckel stumpf; ist hingegen der Bogen kleiner, so ist der Winckel bey dem Umkreise spitzig.

Der 3. Zusatz.

§. 373. So ist auch der Winckel in dem halben Cirkel ein rechter Winckel; ein Winckel in einem Abschnitt, welcher grösser ist als der halbe Cirkel, ist spitzig, und wenn der Abschnitt kleiner ist als der halbe Cirkel, so ist der Winckel in demselben stumpf.

Der 4. Zusatz.

§. 374. Wenn die gerade Linie BC den Cirkel berühret, so steht der Winckel bey dem Umkreise BCD auf dem Bogen CED. Dieser Winckel ist also einem jeden Winckel in dem Abschnitt CFD gleich, weil alle diese Winckel auf eben dem Bogen CED stehen; oder es ist auch der Winckel BCD, halb so groß als der Winckel am Mittelpunct A, welcher auf eben dem Bogen steht. Fig. 58.

Aufgabe.

Fig. 59. §. 375. Auf eine gegebene gerade Linie AB, durch den äusersten Punct derselben B, eine gerade Linie senckrecht zu stellen.

Auflösung.

Aus einem nach Willkühr angenommenen Mittelpunct C beschreibe man durch B einen Cirkelkreis, welcher die gerade Linie AB in D schneide. Man ziehe DC, und verlängere dieselbe, bis CE = CD. Hierauf ziehe man EB, welche auf der geraden Linie AB senckrecht stehen wird.

Beweis.

Denn es ist ABE ein Winckel in einem halben Cirkel, folglich ein rechter Winckel (§. 373.).

Aufgabe.

§. 376. Durch einen auserhalb eines Cirkels gegebenen Punct, eine gerade Linie zu ziehen, welche den Cirkel berühre.

Auflösung.

Fig. 60. Es sey demjenigen Cirkel eine Tangente zu ziehen, dessen Mittelpunct A ist, und der auser demselben gegebene Punct sey B. Man ziehe AB, und beschreibe den Umkreis eines Cirkels, dessen

Durch-

Durchmesser diese AB sey; so wird dieser neue Cirkelkreis den vorigen in den Puncten C, D schneiden; und wenn man BC oder BD ziehet, so wird eine jede von diesen Linien den Cirkel berühren.

Beweis.

Denn wenn die Halbmesser AC, AD gezogen werden, so ist klar, daß die Winckel in den halben Circkel ACB, ADB rechte Winckel sind. Folglich ist die gerade Linie BC, welche dem Halbmesser AC durch den Punct C in dem Umkreise senckrecht stehet, eine Tangente des gegebenen Cirkels (§. 366), und eben dieses ist auch BD.

Zusatz.

§. 377. Weil in den rechtwincklichten Dreyecken ACB, ADB, die Seiten AC, AD, gleich sind, und AB beiden Dreyecken gemeinschaftlich ist, so sind auch die Seiten CB, BD gleich, wie auch die Winckel bey B und A, welche auf beiden Seiten an der Linie AB liegen (§. 344.).

Erklärung.

§. 378. Eine ebene geradlinichte Figur, deren Seiten alle einander gleich sind, und gleiche Winckel einschliessen, heißt eine ordentliche Figur (Regularis); die übrigen Figuren sind unordentliche.

Anmer-

Anmerckung.

Fig. 61. §. 379. Wenn der Umkreis eines Cirkels in gleiche Theile getheilt wird, und man zieht die Sehnen dieser Theile, AB, BC, CD, DE, EA; so entsteht eine ordentliche Figur, welche so viele Seiten, als der Umkreis Theile hat. Denn man siehet leicht, daß die Seiten einer dergestalt in den Cirkel beschriebenen Figur, gleich seyn müssen: daß aber auch die Winckel gleich sind, schließt man daraus, weil sie alle in gleichen Abschnitten von einerley Cirkel liegen (§. 371.).

§. 380. Auf diese Art kan man also, wenn die Geometrische Theilung eines Cirkelkreises in irgend eine Anzahl von gleichen Theilen, bekannt ist, allzeit eine ordentliche Figur in den Cirkel geometrisch beschreiben, welche eben so viele Seiten habe. Es lehren uns aber die Anfangsgründe der Geometrie keine allgemeine Methode diese Theilung des Cirkelkreises in so viele Theile, als man will, zu verrichten, weil dergleichen Theilungen mit denjenigen Instrumenten allein, deren man sich in den Anfangsgründen bedienet, nehmlich dem Cirkel-Instrument, und Lineal, nicht zu Stande gebracht werden können. Doch kan man eine jede Theilung des Umkreises durch Proben gar leicht und genau verrichten (§. 364.), so daß, wenn bloß auf den Gebrauch gesehen wird, man annehmen kan, daß die Beschreibung aller ordentlichen Figuren in den Cirkel in unsrer Gewalt sey.

Zusatz.

§. 381. Wenn die Anzahl der Seiten einer ordentlichen Figur gegeben ist, so ist auch ihr Winckel gegeben, welchen nehmlich jede zwo nebeneinander liegende Seiten derselben einschliessen. Denn es ist die Summe dieser Winckel, wie $A+B+C+D+E$ bekannt (§. 303.). Da nun dieselben alle gleich sind, so wird man einen jeden einzelnen Winckel erhalten, wenn man diese Summe, durch die Zahl der Seiten der Figur dividiret. Es sey n die Zahl der Seiten einer ordentlichen Figur, so ist die Anzahl aller rechten Winckel, welche in den Winckeln der Figur enthalten sind $=2n-4$, folglich hat ein jeder einzelner Winckel der Figur, so viele Theile eines rechten Winckels, als die Zahl $\frac{2n-4}{n}$ Einheiten enthält.

Lehrsatz.

§. 382. Eine jede ordentliche Figur wird, wenn man alle ihre Winckel durch gerade Linien halbiret, in gleichschencklichte Dreyecke getheilet, deren jedes, ein jedes andre decken kan.

Beweis.

Man halbire den Winckel ABC einer ordentlichen Figur durch die gerade Linie BD, und den nächsten Winckel BCE durch die gerade Linie CD, Fig. 62.

und

und verlängere diese Linien bis sie in D zusammenlaufen. Weil nun die Winckel DBC, DCB die Helften von gleichen Winckeln sind, so werden sie auch selbst einander gleich, und das Dreyeck DBC gleichschencklicht seyn. Man ziehe DE aus dem Punct D an die Spitze des nächsten Winckels der Figur. So ist der Winckel DCE, welcher auch halb so groß ist, als der Winckel der Figur, dem Winckel DBC gleich. Es ist aber auch DC = DB und CE = BC; folglich auch das ganze Dreyeck DCE dem Dreyeck DBC dergestalt gleich, daß diese Dreyecke einander decken können; und eben dieses kan auf die nehmliche Art von dem Dreyeck DEF und allen folgenden bewiesen werden. Es sind also alle diese Dreyecke gleichschencklicht, und können einander decken; die geraden Linien DE, DF aber, und die übrigen, welche auf diese Art liegen, halbiren die Winckel der Figur.

Der 1. Zusatz.

§. 383. Ein jeder von den Winckeln, welche um D herumliegen, wird bestimmt, wenn man vier rechte Winckel durch die Zahl der Seiten der Figur dividiret (§. 270). Ziehet man aber einen dieser Winckel, als ADB, von zween rechten Winckeln ab, so bleiben die zween Winckel DAB, DBA übrig, deren jeder die Helfte des Winckels der Figur, und beide zusammen dem Winckel der Figur selbst gleich sind (§. 298.).

Der

Der 2. Zusatz.

§. 384. Wenn die ordentliche Figur sechs Seiten hat, so beträgt ein jeder Winckel bey D, $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ eines rechten Winckels, folglich wird der Winckel der Figur $\frac{4}{3}$, und die Helfte desselben $\frac{2}{3}$ eines rechten Winckels ausmachen. Es entstehen also durch halbirung der Winckel des Sechsecks nicht nur gleichschencklichte, sondern gleichseitige Dreyecke (§. 318).

Der 3. Zusatz.

§. 385. Wenn man aus dem Mittelpunct D durch A einen Cirkelkreis beschreibet, so wird derselbe durch die Spitzen aller Winckel der Figur gehen. Man kan also um eine jede ordentliche Figur einen Cirkel beschreiben, dessen Mittelpunct in einer jeden geraden Linie liegt, welche einen Winckel der Figur halbiret, folglich in dem Durchschnitt zwoer dergleichen Linien gefunden wird.

Der 4. Zusatz.

§. 386. Die Seite eines ordentlichen Sechsecks ist dem Halbmesser des Cirkels gleich, in welchen man das Sechseck beschreiben kan. Die Seite eines Siebenecks und der übrigen ordentlichen Figuren von mehr als sechs Seiten, ist kleiner als der Halbmesser, und die Seite eines Fünfecks ist grösser als derselbe.

Der 5. Zusatz.

Fig. 63. §. 387. Die aus dem Mittelpunct D auf die Seiten der Figur gezogene senckrechte Linien DA, DB, DC und die übrigen, sind alle einander gleich. Daher wird ein aus dem Mittelpunct D durch A beschriebener Cirkelkreis, von allen diesen Seiten berühret (§. 366.); und man kan also auch in eine jede ordentliche Figur einen Cirkel beschreiben. Eben diese senckrechten Linien halbiren auch die Seiten der Figur, und machen um den Mittelpunct gleiche Winckel; auch theilen sie den Umkreis des um D beschriebenen Cirkels in gleiche Theile.

Der 6. Zusatz.

§. 388. Hieraus begreift man leicht, auf was Art aus einer gegebenen Seite, eine ordentliche Figur von einer jeden bestimmten Anzahl von Seiten, beschrieben werden könne; und wie man um einen gegebenen Cirkel eine ordentliche Figur von einer jeden Anzahl von Seiten beschreibe; wenn nur zugegeben wird, daß die Theilung des Umkreises in gleiche Theile, wie auch die Theilung des rechten Winckels, welche wir hier gebrauchen, in unserer Gewalt sey.

Anmerckung.

§. 389. Wenn man alles dasjenige zusammennimmt, was von den ordentlichen Figuren, die man in einen Cirkel, oder um denselben beschreibt, ferner von den Sehnen und Tangenten gesagt worden ist; so folgt daraus, daß eine jede ordentliche Figur, welche in einen Cirkel beschrieben wird, klei-

ner

ner sey als derselbe, der Umfang der Figur kleiner, als der Umkreis des Cirkels, und die senckrechte Linie, welche aus dem Mittelpunct auf die Seiten der Figur fällt, kleiner als der Halbmesser. Verdoppelt man aber die Zahl der Seiten der Figur, oder man vermehrt sie noch weiter, so wird der Unterschied der Figur von dem Cirkel, sowohl als der Unterschied des Umfangs der Figur von dem Umkreise des Cirkels, und der senckrechten Linie aus dem Mittelpunct nach der Seite, von dem Halbmesser, dergestalt verkleinert werden, daß derselbe, wenn man die Zahl der Seiten beständig verdoppelt, zuletzt kleiner wird, als die kleinste Grösse von eben der Art, die man sich vorstellen kan.

§. 390. Beschreibt man hingegen eine ordentliche Figur um einen Cirkel, so ist dieselbe allzeit grösser als der Cirkel, der Umfang der Figur ist grösser als der Umkreis des Cirkels, und die Entfernung der Spitzen der Winckel von dem Mittelpunct grösser als der Halbmesser. Verdoppelt man aber auch hier die Seiten der Figur beständig, so wird auch der Unterschied aller dieser Dinge beständig vermindert, und zuletzt kleiner, als eine jede bestimmte Grösse, die man sich vorstellen kan Es werden also beide ordentliche Figuren, so wohl die, welche in den Cirkel, als die, welche um denselben beschrieben ist, wenn man die Anzahl ihrer Seiten unaufhörlich vergrössert, sich zuletzt in dem Cirkel verlieren: und in diesem Verstande kan man sagen, daß der Cirkel eine Figur von unendlich vielen Seiten sey.

Vierter Abschnitt.

Von Proportional = Linien.

Lehrsatz.

§. 391.

Ein jedes Viereck, in welchem zwo gegenüberliegende Seiten einander gleich und parallel sind, ist ein Parallelogramm. In einem jeden Parallelogramm aber sind die gegenüberliegenden Seiten einander gleich.

Beweis.

Fig. 64. Man ziehe in dem Viereck ABCD, aus der Spitze des Winckels A, nach der Spitze des gegenüberstehenden Winckels C, die Diagonal-Linie AC. Ist nun AD der Seite BC parallel, so ist der Winckel DAC dem Winckel ACB gleich (§. 279.); daher, wenn auch AD = BC, in den Dreyecken DAC, ACB, gleiche Winckel von gleichen Seiten eingeschlossen werden. Es ist also auch der Winckel BAC dem Winckel DCA gleich, (§. 312.) und folglich die Seite AB der Seite CD parallel (§. 275.).

Ist

Ist aber das Viereck, von welchem die Rede ist, ein Parallelogramm, so sind außer den benannten, noch die Winckel BAC, DCA einander gleich, folglich ist in den gleichen Dreyecken ABC, ADC, die Seite AD so groß als die Seite BC, und AB = CD (§. 316.).

Lehrsatz.

§. 392. Wenn die gerade Linie AB aus gleichen Theilen zusammengesezt ist, und man leger einer nach Willkühr gezogenen Linie AC, durch einen jeden Theilungspunct der AB eine Parallellinie, worauf man von der ersten dieser Parallelen bis an die lezte, die gerade Linie CD ebenfalls nach Willkühr ziehet, so wird auch diese CD in gleiche Theile getheilet. Fig. 65.

Beweis.

Man ziehe CE, FG, der geraden Linie AB parallel, so werden diese Linien auch einander parallel liegen, und die Parallelogrammen AE, HG vollenden, in welchen, weil CE = AH und FG = HI (§. 391.), auch CE = AH = HI der Linie FG gleich seyn wird. Da aber die Parallelen CE, FG, von einer geraden Linie CD geschnitten werden, so sind die Winckel ECD, GFD gleich, und da eben diese CD auch die Parallellinien HF, IL schneidet, die Winckel CFE, FLG ebenfalls von gleicher Grösse (§. 277.). Also sind in den Dreyecken CEF, FGL, in welchen die eben benannten Winckel in Ansehung der gleichen Seiten auf einerley Art liegen, auch die Seiten CF, FL einander gleich (§. 316.); und es kan dieser Beweis bey den übrigen Theilen der geraden Linie CD fortgesetzet werden.

Zusatz.

Fig. 66. §. 393. Hieraus sieht man, wie eine gegebene gerade Linie AB, in eine jede Zahl N von gleichen Theilen getheilet werden könne. Wenn man nehmlich von dem Punct A an, eine unbegrentzte Linie AC ziehet, und auf dieselbe einen nach Willkühr angenommenen Theil AD so oft trägt, als viele Einheiten in der Zahl N enthalten sind; hierauf aber, wenn der letzte dieser Theile sich in C endiget, die Puncte C und B verknüpfet, und der geraden Linie CB durch alle in AC bezeichnete Puncte, Parallellinien ziehet, so wird die gerade Linie AB, wie es verlangt worden ist, getheilet.

Lehrsatz.

Fig. 67. §. 394. Wenn drey gerade Linien AB, CD, EF, einander parallel gezogen sind, und man legt von einer der äusersten AB, an die andre EF, zwo neue gerade Linien GH, IK, welche von der mittleren CD, in den Puncten L, M geschnitten werden, so ist GL : GH = IM : IK.

Beweis.

Beweis.

Man theile GH in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, und ziehe aus allen Theilungs-Puncten, den zuerst gezogenen geraden Linien AB, CD, EF, Parallellinien, welche, wenn man sie verlängert, die gerade Linie IK in eben so viele gleiche Theile theilen werden (§. 392.). Ist dieses geschehen, so fällt CD entweder in eine von diesen Parallellinien, oder nicht. Geschieht das erste, so hat die gerade Linie GL so viele gleiche Theile als die gerade Linie IM, woraus die angenommene Proportion ungezweifelt ist (§. 141.). Fällt aber CD in keine von denen durch die Theilungs-Puncte gezogenen Parallellinien, so fällt sie doch zwischen zwo solche, die zunächst an einander liegen, und schneidet keine von denselben. Es kan also GL unmöglich mehrere oder wenigere Theile der geraden Linie GH enthalten, als in IM Theile von IK sind, wie man auch die Anzahl der Theile, und mit dieser die Grösse derselben, annehmen oder verändern mag. Also sind die benannten Linien auch in diesem Falle proportional (§. 146.).

Der 1. Zusatz.

§. 395. Eben so beweißt man, daß LH : GH = MK : IK. Verwechselt man aber die Glieder dieser

Proportionen (§. 166.), so wird GL : IM = GH : IK und LH : MK = GH : IK. Folglich auch GL : IM = LH : MK, und wenn man die Glieder nochmals verwechselt, GL : LH = IM : MK. Es werden also überhaupt die geraden Linien GH, IK, und die Theile derselben, welche zwischen einerley Parallellinien liegen, proportional seyn.

Der 2. Zusatz.

Fig. 68. §. 396. Wenn man also zwischen den Parallelen AB, CD, zwo gerade Linien dergestalt ziehet, daß sie einander in einem Punct E schneiden, so ist AE : AD = BE : BC und AE : ED = BE : EC; denn es kan durch den Punct E eine dritte gerade Linie gezogen werden, welche den anfangs gezogenen AB, CD parallel sey, und die beiden Linien AD, BC in dem Punct E schneide.

Der 3. Zusatz.

Fig. 69. §. 397. Auch sind, wenn man in dem Dreyeck, ABC einer Seite BC, die gerade Linie DE parallel ziehet, folgende Proportionen richtig: AD : AB = AE : AC; AD : DB = AE : EC; DB : AB = EC : AC. Denn es kan auch hier denen beiden Linien BC, DE, eine dritte gerade Linie durch den Punct A parallel gezogen werden, welche die beiden Seiten AB, AC, in diesem Punct schneiden wird.

Der 4. Zusatz.

Fig. 70. §. 398. Wenn AB : AD = AC : AE, und man zieht BC, DE, so sind diese geraden Linien parallel. Denn

denn wenn sie es nicht wären, so sey DF der geraden Linie BC durch den Punct D parallel gezogen. In diesem Fall wäre AB : AD = AC : AF, welches demjenigen zuwider ist, was vorausgesetzt worden.

Aufgabe.

§. 399. Zu drey gegebenen geraden Linien die vierte Proportionallinie zu finden.

Auflösung.

Es seyn die gegebenen geraden Linien a, b, c. Fig. 71.
Man nehme einen Winckel D nach Willkühr, und mache DE = a, DF = b und DG = c. Hierauf ziehe man EG, und dieser durch F die Parallellinie FH, so ist DH die gesuchte vierte Proportionallinie.

Beweis.

Denn es ist in dem Dreyeck DFH die Linie EG der Seite FH parallel. Folglich DE : DF = DG : DH, das ist, a : b = c : DH.

Der 1. Zusatz.

§. 400. Wenn man annimmt DG = DF, so findet man zu zwo gegebenen a und b, die dritte Proportionallinie.

Der 2. Zusatz.

§. 401. Auf eben diese Art wird man eine gerade Linie finden, deren Verhältniß zu einer andern geraden Linie, welche gegeben oder angenommen seyn mag, aus mehreren Verhältnissen, welche alle durch gerade Linien gegeben sind, zusammengesetzt sey. Es seyn die gegebenen Verhältnisse a : b, c : d, e : f, g : h, indem alle diese Buchstaben gerade Linien bedeuten. Nimmt man nun eine gerade Linie A, wenn sie nicht gegeben ist, nach Willkühr an, und macht

$$a : b = A : B$$
$$c : d = B : C$$
$$e : f = C : D$$
$$g : h = D : E$$

so ist die Verhältniß C : A, aus den beiden Verhältnissen d : c und b : a; die Verhältniß D : A aber, aus den dreyen f : e, d : c, b : a, und die Verhältniß E : A aus den vier Verhältnissen h : g, f : e, d : c, b : a zusammengesetzt, u. s. f. (§. 157).

Der 3. Zusatz.

§. 402. Wenn die Verhältnisse, welche zusammengesetzt werden sollen, gleich sind, so ist die Verhältniß C : A, zweymal so hoch als die Verhältniß b : a, die Verhältniß D : A ist dreymal so hoch, und E : A ist viermal so hoch, als eben diese Verhältniß b : a.

Aufgabe.

Fig. 72. §. 403. Eine gegebene gerade Linie AB in eben der Verhältniß zu theilen, in welcher eine andre gerade Linie AC getheilt ist.

Auf-

Auflösung.

Nachdem man die Linien AB, AC, unter einem beliebigen Winckel CAB an einander gelegt hat, ziehe man CB, und dieser durch alle Theilungs-Puncte von AC, die Parallelinien DE, FG, HI. Diese Linien werden, wenn man sie verlängert, die gerade Linie AB theilen, wie es verlangt wird.

Beweis.

Denn wenn man sich vorstellt, daß durch A der geraden Linie BC eine Parallelinie gezogen sey, so liegen jegliche zwey Theile der Linie AB zwischen eben den Parallellinien, zwischen welchen die in der Ordnung gegenüberstehende Theile der Linie AC liegen. Dergleichen Theile sind aber proportional. (§. 394.)

Fünfter Abschnitt.
Von der
Aehnlichkeit der Figuren.

Erklärung.

§. 404.

Zwo oder mehrere ebene geradlinichte Figuren sind ähnlich, wenn alle Winckel der einen, allen Winckeln der andern gleich, und die Seiten, welche zwischen gleichen Winckeln liegen, proportional sind. Wenn zum
Fig. 73. Beyspiel in den Vierecken ABCD, abcd, ist A=a, B=b, C=c und D=d, und ausserdem AB : ab = BC : bc, wie auch BC : bc = CD : cd und so ferner, so sind diese Vierecke einander ähnlich.

Der 1. Zusatz.

§. 405. Alle ordentliche Figuren, welche eine gleiche Anzahl von Seiten haben, sind einander ähnlich; alle gleichseitige Dreyecke, alle Quadrate, alle ordentliche Fünfecke, Sechsecke, ꝛc. woraus man siehet, daß auch alle Cirkel ähnlich seyn müssen (§. 390.).

Der

Der 2. Zusatz.

§. 406. Und weil in ähnlichen Figuren, jede zwo Seiten, welche zwischen gleichen Winckeln liegen, einerley Verhältniß haben: so sey diese Verhältniß einer Seite der einen Figur zu einer Seite der andern L : l, in welchem Fall eine jede der Verhältnisse AB : ab, BC : bc, CD : cd, DA : da dieser Verhältniß L : l gleich seyn wird. Nimmt man auch die Summe aller vorhergehenden, und die Summe aller nachfolgenden Glieder, so werden die Verhältnisse (AB + BC + CD) : (ab + bc + cd) und (AB + BC + CD + DA) : (ab + bc + cd + da) ebenfalls der Verhältniß L : l gleich seyn (§. 162), das ist L : l = ABCD abcd = ABCDA : abcda. Es verhalten sich also in ähnlichen Figuren, die Theile der Umkreise, welche auf einerley Art zwischen den Spitzen von gleichen Winckeln liegen, sowohl als die gantzen Umkreise der Figuren, wie jede zwo Seiten derselben, welche zwischen gleichen Winckeln liegen.

Lehrsatz.

§. 407. Wenn zween Winckel eines Dreyecks ABC zween Winckeln eines andern Dreyecks abc gleich sind, A = a und B = b, so sind die Dreyecke ähnlich. Fig. 74.

Beweis.

Es folgt aus dem, was angenommen worden ist, daß auch der Winckel C dem Winckel c

gleich

gleich sey (§. 298.). Man mache BD = bc, und ziehe DE der Seite AC parallel. So ist der Winckel D dem Winckel C = c gleich, und es können folglich die Dreyecke EBD, abc einander decken (§. 316.). Da nun BA : BE = BC : BD (§. 397.), so ist auch BA : ba = BC : bc. Es sind also die Seiten, welche die gleichen Winckel B, b, in den Dreyecken ABC, abc einschliessen, proportional; und da eben dasselbe von den übrigen Seiten dieser Dreyecke, welche gleiche Winckel einschliessen, erwiesen werden kan, so sind die Dreyecke ähnlich (§. 404).

Der 1. Zusatz.

§. 408. Wenn in einem Dreyeck ABC, einer von den Seiten AC, eine Parallellinie DE gezogen wird, so schneidet dieselbe ein Dreyeck EBD ab, welches dem Dreyeck ABC ähnlich ist; und es ist ausser den Proportionen, welche §. 397. gezeigt worden sind, auch diese allzeit richtig; AB : AC = EB : ED.

Der 2. Zusatz.

§. 409. Wenn man also auf die verlängerte Fig. 75. Grundlinie des Dreyecks ABC ein andres Dreyeck DEF stellet, so daß die Spitze des Winckels D in die gerade Linie AD fällt, welche durch den Punct A der verlängerten Grundlinie BF parallel gezogen ist, und man zieht noch eine andre gerade Linie GK eben dieser BE parallel; so wird, weil BC : GH = AB : AG, und EF : IK = DE : DI, ferner

ner AB : AG = DE : DI (§. 395.), auch die folgende Proportion richtig seyn, BC : GH = EF : IK. Ist also BC = EF, so ist auch GH = IK.

Lehrsatz.

§. 410. Wenn ein Winckel B des Dreyecks ABC, einem Winckel b des Dreyecks abc gleich ist, und die Seiten, welche diese Winckel in beiden Dreyecken einschliessen, sind proportional, so sind die Dreyecke ähnlich. Fig. 74.

Beweis.

Man mache BD = bc, und ziehe DE der Seite AC parallel; so sind die Dreyecke ABC, EBD ähnlich (§. 408.), und BC : BD oder bc = BA : BE. Es ist aber vorausgesetzt worden BC : bc = BA : ba, folglich ist BE = ba, und das Dreyeck abc dem Dreyeck EBD dergestalt gleich, daß sie einander decken können (§. 312.). Also ist auch das Dreyeck abc dem Dreyeck ABC ähnlich.

Lehrsatz.

§. 411. Wenn die Seiten des Dreyecks ABC den Seiten des Dreyecks abc proportional sind, so sind beide Dreyecke einander ähnlich. Fig. 74.

Beweis.

Man setzet voraus, daß die einmal angenommene Ordnung der Seiten nicht verändert

wird.

wird. Wenn also AB : ab = BC : bc, und man macht BE = ba und BD = bc, so wird AB : BE = BC : BD, und die gerade Linie ED der Seite AC parallel (§. 398.), folglich BC : BD oder bc = CA : DE (§. 408.). Man setzt aber auch BC : bc = CA : ca. Daher ist DE = ca; und es sind die Seiten des Dreyecks BDE den Seiten des Dreyecks abc, folglich auch diese beiden Dreyecke selbst dergestalt gleich, daß sie einander decken können. Woraus folgt, daß auch das Dreyeck abc dem Dreyeck ABC ähnlich sey.

Lehrsatz.

§. 412. Rechtwincklichte Dreyecke, in denen die Seiten welche einen der spitzigen Winckel einschliessen, proportional sind, sind einander ähnlich.

Beweis.

Fig. 76. In den Dreyecken ABC, abc, welche bey C, c rechte Winckel haben, sey AB : ab = AC : ac. Man mache BD = ba, und ziehe DE auf BC senckrecht, so wird dieselbe der Seite AC parallel, und das Dreyeck BDE dem Dreyeck ABC ähnlich seyn (§. 408.), daher denn AB : BD oder ab = AC : DE. Vergleicht man aber diese Proportion mit der vorigen, so sieht man daß

DE =

DE = ac. Es kan also das rechtwincklichte Dreyeck DBE das andre abc decken (§. 344.), folglich wird auch dieses Dreyeck abc dem Dreyeck ABC ähnlich seyn.

Anmerckung.

§. 413. Hieraus sieht man überhaupt, daß zwey Dreyecke einander ähnlich werden, wenn man die Winckel, welche dieselben bestimmen, in beiden Dreyecken gleich, und die Seiten, welche zwischen gleichen Winckeln liegen, proportional annimmt: was für einer von den anfangs gezeigten Arten Dreyecke zu beschreiben, man sich übrigens dedienen mag; das ist, man mag das Dreyeck entweder aus einem gegeben Winckel und zwo Seiten, oder aus zween Winckeln und einer Seite, oder endlich aus drey gegebenen Seiten beschreiben. (§. 312. 316. 319.).

Lehrsatz.

§. 414. Wenn man verschiedne Dreyecke dergestalt an einander legt; daß jede zwey derselben eine Seite gemeinschaftlich haben, und man legt andre Dreyecke, welche den ersten ähnlich sind, auf eben diese Art zusammen, so daß allzeit ähnliche Dreyecke in Ansehung der gemeinschaftlichen Seite, einerley Lage bekommen: man macht aber hierauf einige von den ähnlichliegenden Seiten dieser aneinander-

derge-

dergelegten Dreyecke (latera homologa), zu Seiten zwoer ebenen geradlinichten Figuren, so werden diese Figuren ähnlich.

Beweis.

Es sind in fig. 77 und 78 die ähnlichen Dreyecke mit einerley Buchstaben bezeichnet; und aus einigen ähnlichliegenden Seiten dieser Dreyecke, die Figuren ABCDEFG und abcdefg zusammengesetzt worden. Ich sage, diese Figuren werden ähnlich seyn. Denn es sind die in denselben mit einerley Buchstaben bezeichneten Winckel einander gleich, indem sie aus gleichen Winckeln ähnlicher Dreyecke durch das addiren oder subtrahiren entstanden sind. Was aber die Seiten betrift, so ist $GF : gf = FE : fe = GE : ge = GA : ga = AE : ae = AD : ad = DE : de$ und so ferner. Nimmt man also nur diejenigen Seiten der ähnlichen Dreyecke, welche zugleich Seiten der Figuren ABCDEFG, abcdefg sind, so werden auch die Seiten der Figuren, welche in Ansehung der gleichen Winckel einerley Lage haben, proportional seyn.

Zusatz.

§. 415. Man sieht hieraus, wie man einer jeden ebenen geradlinichten Figur ABCDEFG, eine ähnliche Figur abcdefg, beschreiben könne, nachdem

dem die Dreyecke, aus denen die erste Figur zusammengesetzt worden, nach Willkühr angenommen sind. Es muß aber die Verhältniß einer von den Seiten der Figur ABCDEFG, zu einer ähnlichliegenden Seite in der Figur abcdefg, welche man beschreiben soll, gegeben seyn; oder man muß sonst die Verhältniß einer Seite, von einem der Dreyecke, aus denen die gegebene Figur zusammengesetzt ist, zu der ähnlichliegenden Seite eines der Dreyecke, aus denen die verlangte Figur zusammengesetzt werden soll, wissen; damit man von dieser bekannten Seite die Beschreibung der Figur abcdefg anfangen könne.

Anmerckung.

§. 416. Die Beschreibung selbst aber kan, wenn man sie besonders betrachtet, auf vielerley Arten verändert werden, nachdem man zu der gegebenen Figur verschiedne Dreyecke angenommen hat, oder, indem man damit beschäftiget ist, die Dreyecke der neuen Figur, welche den ersteren ähnlich seyn sollen, zu beschreiben, sich entweder der Gleichheit der Winckel, oder der gleichen Verhältniß der Seiten, oder beider Dinge zugleich bedienet. Eine der allereinfachsten Arten dergleichen ähnliche Figuren zu beschreiben, ist die folgende. Man nimmt bey der gegebenen Figur (fig. 79.), oder innerhalb derselben, einen Punct H an, und ziehet aus diesem Punct an die Spitzen aller Winckel der Figur gerade Linien HA, HB, HC rc. Hierauf legt man (fig. 80.) an den Punct h einer nach Willkühr gezogenen geraden Linie ha, so viele Winckel, als um den Punct H liegen, in eben der Ordnung und von eben der Grösse; und schneidet von den Seiten, welche diese Winckel einschliessen, solche Stücke ha, hb ꝛc. ab, welche sich zu den Linien HA, HB ꝛc. die bey der gegebenen Figur, von dem Punct H aus, auf einerley Art an gleichen Winckeln liegen, eben so verhalten, wie eine Seite der Figur, die man beschreiben soll, zu der ähnlichliegenden Seite der gegebenen Figur. Ist nehmlich diese gegebene oder angenommene Verhältniß L : l, so muß man machen L : l = HA : ha = HB : hb = HC : hc, und so weiter, indem die Winckel AHB, ahb AHC, ahc ꝛc. einander gleich sind. Ist dieses alles geschehen, so beschreibt man die Figur abcdefg, wenn man die Puncte a, b, c ꝛc. durch die geraden Linien ab, bc. ꝛc. gehörig verbindet.

Lehrsatz.

§. 417. Ausschnitte von verschiednen Cirkeln sind einander ähnlich, wenn ihre Winckel am Mittelpunct gleich sind; auch sind die Abschnitte ähnlich, welche mit dergleichen Ausschnitten einerley Bogen haben.

Beweis.

Fig. 81. Es sind die Winckel ABC, abc gleich, und man solle innerhalb des Winckels abc eine Figur beschreiben, welche dem Ausschnitt ABC ähnlich sey.

sey. Man ziehe von dem Punct B die gerade Linie BD, und mache den Winckel abd = ABD, wie auch AB : ab = BD : bd, oder, weil BD = AB, mache man auch bd = ab, so ist b ein Punct in dem Umfang der Figur, die man beschreiben soll. Setzt man aber diese Arbeit bey allen Puncten des Bogens ADC fort, so beschreibt man den Ausschnitt abc, welcher folglich dem Ausschnitt ABC ähnlich seyn wird. Aus eben diesen Gründen werden, wenn man die Sehnen AC, ac ziehet, auch die Abschnitte ACD, acd einander ähnlich.

Der 1. Zusatz.

§. 418. Es verhalten sich also die Bogen von ähnlichen Ausschnitten und Abschnitten, wie die Halbmesser, oder wie die Sehnen der Abschnitte.

Der 2. Zusatz.

§. 419. Die halben Umkreise der Cirkel verhalten sich ebenfalls wie ihre Halbmesser, oder auch wie ihre Durchmesser, und eben diese Verhältniß haben die gantzen Umkreise.

Lehrsatz.

§. 420. Wenn man die Spitzen der gleichen Winckel in zwoen ähnlichen Figuren, in einerley Ordnung durch gerade Linien verknüpfet,

knüpfet, so werden die Figuren in ähnliche Dreyecke zertheilet.

Beweis.

Fig. 82. Es sey dieses in den ähnlichen Figuren ABCDE, abcde geschehen. Weil nun der Winckel A = a und AB : ab = AE : ae, so ist das Dreyeck ABE dem Dreyeck abe ähnlich, und BE : be = AB : ab; es ist aber auch BC : bc = AB : ab; folglich BE : be = BC : bc. Ferner ist der Winckel ABE dem Winckel abe gleich, und wenn man diese gleichen Winckel von den gleichen Winckeln ABC, abc abzieht, bleiben gleiche Winckel EBC, ebc übrig. Hieraus schließt man weiter, daß das Dreyeck EBC dem Dreyeck ebc ähnlich sey, und es lassen sich diese Schlüsse, auf die Dreyecke, welche an den Seiten EC, ec liegen, leicht anwenden, und weiter fortsetzen, wenn noch mehrere Dreyecke seyn solten.

Der 1. Zusatz.

§. 421. In ähnlichen Figuren, verhalten sich die geraden Linien welche auf einerley Art die Spitzen von gleichen Winckeln verknüpfen, BE, be, oder CE, ce, wie die ähnlichliegenden Seiten der Figuren AB, ab, oder BC, bc, und so ferner.

Der

Der 2. Zusatz.

§. 422. Wenn man in zwoen nach Willkühr genommenen ähnlichliegenden Seiten AB, ab, zwoer ähnlichen Figuren ABC, abc, die Puncte D, d dergestalt nimmt, daß AD : DB = ad : db oder AD : ad = DB : db, folglich AD : AD + DB = ad : ad + db oder AD : ad = AD + DB : ad + db, so sieht man, daß die Verhältnisse AD : ad, und DB : db der Verhältniß AB : ab oder BE : be ꝛc. gleich sind. Es bleiben also die Figuren ähnlich, wenn man annimmt, daß in dieselben zween neue Winckel D, d gekommen sind, deren jeder zween rechten Winckeln gleichet, an die Stelle der Seite AB aber, zwo neue Seiten AD, DB, und an die Stelle der Seite ab, zwo andre ad, db gebracht worden. Was also in diesem Fall erwiesen worden ist (§. 420), wenn die Puncte D, d, oder andere dergleichen, in der That Spitzen von Winckeln der Figuren sind, wird auch richtig seyn, wenn man diese Puncte als Spitzen eines Winckels betrachtet, welcher zwoen rechten Winckel gleichet, so daß auch hier, wenn man zum Beyspiel DE, de, an die Spitzen gleicher Winckel ziehet, die Dreyecke DBE, dbe ähnlich sind, und DE : de = AB : ab = BE : be ꝛc. Fig. 83.

Sechster Abschnitt.

Von den
Proportionen bey dem Cirkel.

Lehrsatz.

§. 423.

Fig. 84. 85. Wenn durch einen, innerhalb oder ausserhalb eines Cirkels angenommenen Punct A, zwo gerade Linien gehen, welche den Umkreis des Cirkels in den Puncten B, C, D, E schneiden, so ist AB : AD = AE : AC.

Beweis.

Denn wenn man die geraden Linien BE, DC ziehet, werden die Winckel am Umkreise, BCD, BED, welche auf einerley Bogen BD stehen, einander gleich (§. 371.). Da nun auch in den Dreyecken ABE, ADC, ausser diesen, die Winckel bey A gleich sind, so sind diese Dreyecke ähnlich (§. 407.), und ihre ähnlichliegenden Seiten proportional, folglich AB : AD = AE : AC.

Der 1. Zusatz.

§. 424. Es sind also die geraden Linien AD, AE die zwey mittleren Glieder in der Proportion AB : AD = AE : AC, und die Sehne DE ist, wenn der Punct A auser dem Cirkel liegt, die Differentz von AE und AD, fällt aber A in den Cirkel; so ist sie die Summe dieser Linien.

Der 2. Zusatz.

§. 425. Wenn A auserhalb des Cirkels fällt, so wird diese Differenz DE desto kleiner, je grösser der Winckel A wird, und verschwindet zuletzt gar, wenn AD den Cirkel berühret (§. 267.). Alsdenn fallen die Puncte D, E, in einen zusammen, und es wird AB : AD = AD : AC, folglich AD die mittlere Proportionallinie zwischen AB und AC. Fig. 85. 86.

Der 3. Zusatz.

§. 426. Liegt aber der Punct A in dem Cirkel, so kan man DE dergestalt ziehen, daß sie in dem Punct A in zwey gleiche Theile getheilet wird, nehmlich DA = AE. In diesem Fall verwandelt sich die Proportion AB : AD = AE : AC in die folgende AB : AD = AD : AC, und wird AD abermals die mittlere Proportionallinie zwischen AB und AC. Fig. 84. 87.

Aufgabe.

§. 427. Zu zwoen gegebenen geraden Linien q und r zwo andre zu finden, deren gegebene Dif-

Differenz p sey, so daß sich q zu der ersten von den gesuchten verhalte, wie die zweyte der gesuchten, zu r.

Auflösung.

Fig. 88. Man ziehe zwo unbegrentzte gerade Linien, die auf einander senckrecht stehen. Von dem Schneidungs-Punct A an, lege man auf die eine derselben, AB = p, auf die andre aber AC = q, und AD = r, diese beiden letzten auf entgegengesetzte Seiten. Man theile ferner AB bey E in zwey gleiche Theile, und thue eben dieses mit CD bey F, worauf man das Rechteck AG vollendet. Aus dem Mittelpunct G beschreibe man durch C einen Cirkelkreis, welcher auch durch den Punct D gehen, die verlängerte AB aber in H und K schneiden wird. Die geraden Linien AH und AK sind die gesuchten.

Beweis.

Weil GE aus dem Mittelpunct des Cirkels auf die Sehne HK senckrecht fällt, ist HE = EK (§. 353.). Es ist aber auch EB = EA, folglich HA = BK Da nun AB die Differenz der geraden Linien AK, BK ist, so ist eben diese AB oder p, auch die Differenz der geraden Linien AK, AH. Es ist aber ausser diesem, AC : AH = AK : AD (§. 423.), das ist, q : AH = AK : r, also ist die Aufgabe gelöset.

Der

Der 1. Zusatz.

§. 428 Wenn man AH mit dem Buchstaben x bezeichnet, so wird AK = x + p, und die Proportion folgendermassen ausgedrückt: q : x = x + p : r. Nennt man aber AK, x, so wird AH = x — p, und man muß die Proportion also schreiben: q : x — p = x : r.

Der 2. Zusatz.

§. 429. Wenn q = r so wird AC = AD, und der Mittelpunct des Cirkels fällt in E.

Der 3. Zusatz.

§. 430 Wenn aber die Differenz p oder AB verschwindet, so fällt der Mittelpunct in die gerade Linie CD, wodurch die Proportionen §. 428. in die folgende verwandelt werden q : x = x : r, und x die mittlere Proportionallinie zwischen q und r wird.

Aufgabe.

§. 431. Zu zwoen gegebenen geraden Linien q und r, zwo andre zu finden, deren gegebene Summe p sey, so daß sich q zu der ersten von den gesuchten verhalte, wie die zweyte der gesuchten zu r.

Auflösung.

Man ziehe zwo unbegrenzte gerade Linien auf einander senckrecht. Von dem Schneidungs- Fig. 89.
Punct

Punct A an, lege man auf die eine derselben AB = p, und auf die andre, AC = q, und AD = r, beide auf einerley Seite. Man halbire AB in E, und CD in F, und vollende das Rechteck AG. Hierauf beschreibe man aus dem Mittelpunct G, durch C einen Cirkelkreis, welcher auch durch D gehen wird. Wenn nun derselbe die gerade Linie AB in H und K schneidet, so sind AH, AK die gesuchten.

Beweis.

Weil GE aus dem Mittelpunct des Cirkels auf die Sehne HK senckrecht fällt, ist HE = EK. Es ist aber auch EA = EB, folglich AH = KB. Da nun AB die Summe der geraden Linien AK, KB ist, so ist auch eben diese AB oder p, die Summe der geraden Linien AH, AK. Es ist aber auch AC: AH = AK: AD (§. 423.), oder q: AH = AK: r. Also ist die Aufgabe gelöset.

Der 1. Zusatz.

§. 432. Wenn man AH mit x bezeichnet, wird AK = HB = p — x, und die Proportion folgendergestalt ausgedrückt q : x = p — x : r. Und hier wird nichts geändert, wenn man AK mit x bezeichnet. Denn nunmehr wird AH = p — x und die Proportion q: p — x = x: r unterscheidet sich von der vorigen bloß dadurch, daß die mittleren Glieder verwechselt sind.

Der

Der 2. Zusatz.

§. 433. Wenn $q = r$, so verschwindet CD, und AD berühret den Cirkel in eben dem Punct, in welchem die verlängerte GF denselben schneidet. Alles übrige bleibt.

Der 3. Zusatz.

§. 434. Wachsen aber die geraden Linien AC, AD zugleich, welches geschieht, indem sich der Punct A in der geraden Linie CA von C entfernet, so kommen die Puncte H, K einander näher, indem die Sehne HK kleiner wird, worauf, wenn CA und DA beständig vergrößert werden, diese Puncte endlich in einen zusammenfallen, indem die Sehne HK verschwindet. Alsdenn findet man nur eine mittlere Proportionallinie zwischen AC und AD, und diese ist der geraden Linie FG gleich. Werden aber CA, DA, noch über diese Grentzen verlängert, so wird AB den Cirkel gar nicht berühren, und es ist in diesem Fall nicht möglich zwischen AC und AD zwo dergleichen mittlere Linien zu finden, deren Summe AB sey.

Anmerckung.

§. 435. Es werden unendlich viele Aufgaben durch dergleichen Proportionallinien aufgelöset, daher die Art dieselben zu finden hier nicht vorbey zu gehen war. Sie werden aber von andern gantz anders gefunden, und auch diese allgemeine Aufgaben so vorgetragen, daß es schwer einzusehen ist, daß es eben diese sind. Die Art sie vorzutragen und aufzulösen,

welche

welche man hier gegeben hat, scheint die einfachste zu seyn.

Aufgabe.

§. 436. Zwischen zwoen gegebenen geraden Linien die mittlere Proportionallinie leichter zu finden.

Auflösung.

Fig. 90. Wenn die geraden Linien, zwischen denen man die mittlere Proportionallinie finden soll, AB und BC sind, welche dergestalt in eine gerade Linie an einander gelegt worden, daß das Ende der ersten der Anfang der letzten ist, so beschreibe man auf AC einen halben Cirkel, und stelle durch den Punct B die gerade Linie BD auf den Durchmesser senckrecht. So ist AB : BD = BD : BC.

Sind aber die gegebenen geraden Linien, AB und AC, welche von einem Punct A anfangen, so verfahre man wie vorher, und ziehe hierauf AD, so ist AB : AD = AD : AC.

Beweis.

Denn wenn man DC ziehet, so ist ADC ein Winckel im halben Cirkel, folglich ein rechter Winckel. Es sind aber auch bey B rechte Winckel, und A ist den beiden Dreyecken ADB, ADC gemeinschaftlich. Also sind diese Dreyecke ähnlich,

lich, und AB : AD = AD : AC, welches das letzte war.

Aber es sind auch die Dreyecke ADC, DBC ähnlich, weil sie den Winckel C gemeinschaftlich haben; daher ist auch das Dreyeck ABD dem Dreyeck DBC ähnlich, und AB : BD = BD : BC, welches das erste war.

Zusatz.

§. 437. Wenn in dem rechtwincklichten Dreyeck ADC, aus der Spitze des rechten Winckels D, auf die größte Seite AC, eine Linie DB senckrecht fällt, so wird das Dreyeck in zwey rechtwincklichte Dreyecke DBA, DBC zertheilet, welche untereinander, und auch dem gantzen Dreyeck ADC ähnlich sind.

Lehrsatz.

§. 438. Jede zween ebene Winckel, als ABC, ABD, verhalten sich gegeneinander, wie die Bogen, welche um ihre Spitzen B, mit einerley oder gleichen Halbmessern, zwischen den Schenckeln der Winckel beschrieben sind. Fig. 91.

Beweis.

Es seyn diese Bogen EF, EG, so wird behauptet, daß ABC : ABG = EF : EG. Man theile den Bogen EG nach Willkühr in gleiche Theile, und ziehe von allen Theilungs-Puncten gerade

Lini-

Linien nach B, welche den Winckel ABD in eben so viele gleiche Theile theilen werden. (§. 352). Von diesen Linien wird eine in CB fallen, oder nicht. Ist das erste, so sind so viele Theile des Bogens EG in dem Bogen EF, als Theile des Winckels ABD in dem Winckel ABC sind, daher die Proportion ABC : ABD = EF : EG von selbst klar ist (§. 141.) Fällt aber keine von den geraden Linien, welche den Winckel ABD in gleiche Theile theilen, in BC, so ist doch dieses deutlich, daß unmöglich mehrere oder wenigere Theile des Bogens EG in dem Bogen EF seyn können, als Theile des Winckels ABD in dem Winckel ABC sind, wie man auch die Anzahl der Theile verändern mag. Also werden auch in diesem Fall die Winckel den Bogen proportional seyn. (§. 148.)

Zusatz.

§. 439. Es verhält sich also ein jeder Winckel zu einem rechten Winckel, wie der Bogen, welcher auf die eben angezeigte Art zwischen den Schenckeln des Winckels beschrieben worden ist, zu dem Quadranten eines mit eben dem Halbmesser beschriebenen Cirkels; und zu zween rechten Winckeln, wie eben der Bogen zu dem halben Umkreise. Durch diese Verhältniß eines Bogens zu dem Quadraten, oder zu dem halben oder gantzen Umkreise, können alle Winckel bestimmt werden.

Anmer-

Anmerckung.

§. 440. Daher kommt es, daß der Bogen, welcher aus der Spitze eines Winckels zwischen den Schenckeln desselben beschrieben ist, das Maas des Winckels genennt wird. Wenn man nehmlich diesen Bogen beschrieben hat, so kan man die Verhältniß desselben zu dem Quadranten, oder zu dem gantzen Umkreise, so genau als es verlangt wird finden, wenn man den Bogen sowohl, als den Quadranten, in gleiche Theile theilet, die klein genung sind; und ist diese Verhältniß bekannt, so lassen sich aus derselben die Winckel, beynahe auf eben die Art bestimmen, wie man die Länge der geraden Linien, durch ein Maas zu geben pflegt, welches an dieselben gelegt worden ist. Eigentlich aber kan ein Bogen einen Winckel nicht messen, da beide von gantz verschiedner Art sind, und es wird weder durch die Theilung, noch durch die Wiederholung eines Bogens jemals ein Winckel hervor gebracht; da hingegen ein eigentliches Maas, wenn man es selbst, oder die Theile desselben, oft genung wiederholet, dasjenige, was gemessen werden soll, allzeit erschöpfet und genau herausbringt. (§. 3.)

Siebender Abschnitt.

Von der Vergleichung ebener Figuren.

Lehrsatz.

§. 441.

Fig. 92. Alle ebene Figuren, welche zwischen zwoen Parallellinien AB, CD dergestalt liegen, daß sie eine jede derselben berühren, sind einander gleich, wenn, man mag wo man will eine dritte gerade Linie EF den vorigen AB, BC parallel ziehen, die Stücke dieser neuen Linie GH, IK, welche innerhalb der Figuren fallen, allzeit einander gleich sind.

Beweis.

Denn es sind diese Figuren von der einen Parallellinie AB nach der andern CD, gleich ausgedehnt; aus der Gleichheit aber aller der Linien, GH, IK, welche man nach Willkühr ziehen mag, folgt, daß eben diese Figuren auch nach der Länge der Parallellinien, bey allen Puncten, welche von

von diesen in einerley Entfernung liegen, gleich ausgedehnt sind: es können also die Figuren nicht ungleich seyn.

Anmerckung.

§. 442. Dieser Satz ist an sich klar. Man will aber hiedurch nicht so viel sagen, als ob die Figuren aus Parallellinen zusammengesetzt würden, welches, da die Linien keine Breite haben, eigentlich nicht angeht; sondern man bedient sich bloß der Länge der geraden Linien, um die Ausdehnung der Figuren nach dieser oder jener Seite anzuzeigen.

Lehrsatz.

§. 443. **Die Parallelogrammen AB, CD und die Dreyecke EFG, HIK, welche auf einerley Grundlinien, LB = MD = FG = IK, zwischen zwo Parallellinien AN, LK gestellt werden können, sind gleich, nehmlich ein Parallelogramm dem andern, und ein Dreyeck dem andern. Vergleicht man aber ein Parallelogramm mit einem Dreyeck, so ist jenes doppelt so groß als dieses.** Fig. 93.

Beweis.

Denn wenn man die OP, wo man will, den geraden Linien AN, LK parallel zieht, so wird OQ = RS, und TV = XP (§. 409.), folglich AB = CD und EFG = HIK (§. 441.) Macht (Anfangsgr. der Arithm.) T man

man aber HN der Grundlinie IK gleich, und vollendet das Parallelogramm, indem man NK ziehet, so wird dieses Parallelogramm HIKN, einem jeden der vorigen AB oder CD gleich seyn. Da nun dasselbe doppelt so groß ist als das Dreyeck HIK, so sind auch AB oder CD doppelt so groß als dieses Dreyeck.

Der 1. Zusatz.

Fig. 94. §. 444. Wenn daher die Grundlinie AB des Parallelogrammen AC, halb so groß ist als die Grundlinie DE des Dreyecks DEF, welches mit dem Parallelogramm zwischen einerley Parallellinien stehet, so ist das Parallelogramm dem Dreyeck gleich.

Der 2. Zusatz.

Fig. 95. §. 445. Sind aber zwischen zwoen Parallellinien mehrere Dreyecke, ABC, DCE, FEG auf gleichen oder ungleichen Grundlinien BC, CE, EG beschrieben, so sind alle diese Dreyecke zusammengenommen so groß, als das Dreyeck ABG, welches zwischen eben den Parallellinien auf einer Grundlinie stehet, welche die Summe von BC, CE und EG ist. Denn es ist $ACE = DCE$ und $AEG = FEG$; folglich $ABC + DCE + FEG = ABC + ACE + AEG = ABG$.

Anmer-

Anmerckung.

§. 446. Man pflegt die Entfernung der Parallellinien, oder die gerade Linie, welche von einer auf die andre senckrecht gezogen ist, die Höhe eines Parallelogrammen oder eines Dreyecks zu nennen, welches dergestalt zwischen diesen Parallellinien stehet, wie es in den Zeichnungen erscheinet. Durch diese Benennung, kan man den vorhergehenden Lehrsatz also ausdrücken: alle Parallelogrammen, und alle Dreyecke sind gleich, wenn ihre Grundlinien und ihre Höhen gleich sind; und ein Parallelogramm ist doppelt so groß als ein Dreyeck, welches eben die Grundlinie und eben die Höhe hat. Man kan aber eine jede Seite eines Parallelogrammen oder eines Dreyecks vor die Grundlinie annehmen.

Aufgabe.

§. 447. **Mit einem gegebenen Winckel, ein Parallelogramm oder ein Dreyeck zu beschreiben, welches einem gegebenen Parallelogramm oder Dreyeck gleich sey.**

Auflösung.

Es sey das Dreyeck ABC oder das Parallelogramm ABCD gegeben, und der gegebene Winckel, welchen man an die verlängerte Grundlinie BC gelegt hat, sey E. Man mache EF = BC, und nachdem die Seite AD, welche der Fig. 96.

Grundlinie BC parallel ist, verlängert worden, vollende man das Dreyeck GEF, oder das Parallelogramm GEFH, so wird das Dreyeck GEF dem gegebenen Dreyecke ABC, und das Parallelogramm GEFH dem Parallelogramm ABCD gleich. Soll aber ein Parallelogramm beschrieben werden, welches dem Dreyeck ABC gleich sey, so verfahre man wie vorher, und halbire EF in I, worauf man das Parallelogramm EK vollendet.

Beweis.

Denn es stehen die neuen Figuren, wleche man beschrieben hat, zwischen den Parallelen AH, BF; und es folgt also aus der Grösse ihrer Grundlinien $BC = EF$ und $EI = \frac{1}{2} BC$, daß sie denjenigen Figuren gleich sind, denen man sie gleich machen solte (§. 443.). Sie haben aber auch alle den gegebenen Winckel E.

Zusatz.

§. 448. Hieraus sieht man, wie ein Rechteck beschrieben werde, welches einem gegebenen Parallelogramm oder Dreyeck gleich sey.

Aufgabe.

§. 449. Wenn eine ebene geradlinichte Figur von mehr als drey Seiten gegeben ist,

eine

eine andre Figur zu beschreiben, welche der ersten gleich sey, aber eine Seite weniger habe.

Auflösung.

Die gegebene Figur sey ABCD. Man schneide von derselben wo man will ein Dreyeck ABD ab, und ziehe AE, der Diagonallinie BD, durch welche das Dreyeck abgeschnitten worden ist, parallel. Man verlängere ferner die Seite CD der Figur, welche auf einer oder der andern Seite an dem Dreyeck liegt, bis sie die Parallellinie AE erreichet; hierauf ziehe man BE, so ist die Figur EBC von der Beschaffenheit, wie sie verlangt wurde. Fig. 97.

Beweis.

Denn es ist das Dreyeck EBD dem Dreyeck ABD gleich, folglich BCD + EBD = BCD + ABD, das ist, die Figur EBC hat mit der Figur ABCD gleichen Inhalt. Die Zahl aber der Seiten in der Figur EBC ist um Eins kleiner als die Zahl der Seiten in der Figur ABCD, weil, ob gleich an die Stelle der Seiten AB, AD, die Seiten BE, ED gekommen sind, die letzte mit der Seite CD dergestalt vereinigt ist, daß man diese beide nicht vor zwo, sondern vor eine einzige Seite halten muß.

Zusatz.

§. 450. Wenn man auf eben diese Art fortfährt die Anzahl der Seiten einer Figur zu vermindern, so erhält man zuletzt ein Dreyeck, welches der anfangs gegebenen Figur so wohl, als alle übrigen, welche nach und nach durch Verminderung der Zahl der Seiten entstanden sind, gleich ist.

Lehrsatz.

§. 451. **Eine jede ordentliche Figur, ist einem Dreyeck gleich, dessen Grundlinie der Umfang der Figur, und dessen Höhe der Halbmesser des Cirkels ist, welchen man in die Figur beschreiben kan.**

Beweis.

Fig. 98 Es sey die ordentliche Figur, ABCDE, und F der Mittelpunct des Cirkels der in dieselbe beschrieben werden kan. Wenn man also AF, BF, CF ꝛc. ziehet, so wird die Figur in gleiche Dreyecke AFB, BFC, CFD ꝛc. getheilet (§. 382.), und wenn man die Seiten der ordentlichen Figur vor die Grundlinien dieser Dreyecke annimmt, so ist die gemeinschaftliche Höhe derselben, die senckrechte Linie, welche aus dem Mittelpunct F auf die Seite AB gezogen wird, das ist (§. 387.) der Halbmesser des Cirkels, welchen man in die Figur beschreiben kan. Also sind alle diese

Dreyecke zusammengenommen, dem einzigen Dreyeck FGH gleich, dessen Grundlinie die Summe der Grundlinien AB, BC, CD, DE, EA, oder der Umfang der Figur ist, und welches diesen Halbmesser zur Höhe hat; und eben diesem Dreyeck FGH ist auch die ordentliche Figur ABCDE gleich.

Zusatz.

§. 452. Ein jeder Theil einer ordentlichen Figur, wie EABF, ist dem Dreyeck GFB gleich, welches die vorige Höhe hat, und dessen Grundlinie GB der Summe der Seiten EA+AB, welche zu diesem Theil der Figur gehören, gleich ist.

Lehrsatz.

§. 453. Ein Cirkel ist einem Dreyeck gleich, dessen Grundlinie dem Umkreise des Cirkels, und dessen Höhe dem Halbmesser desselben gleichet.

Beweis.

Denn es unterscheidet sich ein Cirkel von einer um denselben beschriebenen ordentlichen Figur um desto weniger, je grösser die Anzahl der Seiten dieser Figur ist, und dieser Unterschied verschwindet gänzlich, wenn die Zahl der Seiten unendlich groß wird, so daß alsdenn der Umfang der ordentlichen Figur, mit dem Umkreise des Cirkels zusammenfällt (§. 389. 390.).

Zusatz.

§. 454. Es ist also auch ein Ausschnitt von einem Cirkel, einem Dreyeck gleich, welches den Bogen des Ausschnittes zur Grundlinie, und den Halbmesser zur Höhe hat.

Anmerckung.

§. 455. Wenn daher eine gerade Linie gegeben ist, welche dem Umkreise eines Cirkels gleichet, so ist es sehr leicht, ein Dreyeck oder ein Parallelogramm zu beschreiben, welches mit dem Cirkel gleichen Inhalt habe. Allein es ist kein Mittel bekannt, eine gerade Linie die dem Umkreise eines Cirkels vollkommen gleich wäre, Geometrisch zu schaffen, ob man gleich einige hat, durch welche dieses mit einem so kleinen Fehler geleistet wird, daß er kaum jemals zu mercken ist; indem man sich nehmlich auf die Zahlen gründet, durch welche die Arithmetick die Verhältniß des Durchmessers zu dem Umkreise, so genau als es nöthig ist, ja genauer als man es jemals brauchen kan, ausdrückt. Die folgende Beschreibung ist von dieser Art, und ziemlich einfach. Man theilet den Umkreis in vier
Fig. 99. gleiche Theile, und ziehet die Sehne eines Quadranten, AB, welche man hierauf in fünf gleiche Theile theilet, von denen der erste BC sey: so ist der Umkreis des Cirkels dreyen Durchmessern, mit dem

dem hinzugefügten Theile BC gleich; und der Fehler, um welchen nehmlich der auf diese Art gefundene Umkreis, kleiner ist als der wahre, beträgt weniger als $\frac{1}{5000}$ des Durchmessers. Man kan auch mit einem geringen Fehler, die Verhältniß des Durchmessers zu dem Umkreise durch 7 : 22, oder 1 : $3\frac{1}{7}$ ausdrücken.

§. 456. Hat man auf diese, oder eine andre Art, eine gerade Linie gefunden, welche dem gantzen Umkreise eines Cirkels gleich ist, so findet man eine gerade Linie, die einem Bogen gleich sey, dessen Verhältniß zu dem gantzen Umkreise gegeben ist, wenn man sagt: wie der gantze Umkreis zu dem Bogen, so verhält sich die gerade Linie, welche dem gantzen Umkreise gleich ist, zu derjenigen geraden Linie, welche dem Bogen gleich seyn soll.

Lehrsatz.

§. 457 Parallelogrammen, deren Höhen gleich sind, verhalten sich gegeneinander, wie ihre Grundlinien. Eben dieses ist bey Dreyecken von gleicher Höhe richtig.

Beweis.

Es seyn die Parallelogrammen ABC, DEF von gleicher Höhe, die Winckel derselben mögen seyn welche sie wollen. Man mache BG = EF, und ziehe durch G der Seite AB eine Parallellinie: Fig. 100

so wird das Parallelogramm ABG dem Parallelogramm DEF gleich, und ABC : ABG = ABC : DEF. Man theile ferner BC in gleiche Theile von beliebiger Anzahl, und ziehe durch alle Theilungs-Puncte gerade Linien der Seite AB parallel, welche das Parallelogramm ABC in so viele gleiche Parallelogrammen theilen werden, als Theile in BC sind (§ 446.). Fällt einer von den Theilungs-Puncten der geraden Linie BC in den Punct G, so ist offenbar, daß ABC : ABG = BC : BG, weil in diesem Fall das Parallelogramm ABC, eben so viele gleiche Theile hat, als die Grundlinie BC, und das Parallelogramm ABG so viele, als die Grundlinie EF. (§. 141.). Wenn aber auch keiner von den Theilungs-Puncten der geraden Linie BC in G fällt, so ist es doch nicht möglich, man mag die Zahl der gleichen Theile in BC verändern wie man will, daß in BG mehr oder weniger Theile von BC seyn solten, als das Parallelogramm ABC Theile des Parallelogrammen ABC enthält. Und auch in diesem Falle wird die Proportion richtig seyn. (§. 146.).

Eben dieser Beweis gilt auch von den Dreyecken, wenn man die 101. Figur vor Augen hat.

Lehr-

Lehrsatz.

§. 458. Parallelogrammen, welche gleiche Grundlinien haben, verhalten sich wie ihre Höhen, und eben dieses ist bey Dreyecken von gleichen Grundlinien richtig.

Beweis.

Die Parallelogrammen ABC, DEF, haben gleiche Grundlinien BC = EF, und die Höhen derselben sind AG, DH. Man beschreibe auf die Grundlinie bc = BC das Rechteck abc, dessen Seite ab sey = AG, und auf die Grundlinie ef = EF beschreibe man ein andres Rechteck def, dessen Seite de sey = DH. So ist abc = ABC, und def = DEF (§. 446.) folglich ABC : DEF = abc : def. Nimmt man aber in den Rechtecken abc, def die gleichen Seiten bc, ef vor die Höhen an, so verhalten sich diese Parallelogrammen abc, def, wie die übrigen Seiten ab : de oder AG : DH (§. 457.). Also ist auch ABC : DEF = AG : DH Fig. 102.

Von den Dreyecken auf gleichen Grundlinien ABC, DEF, beweiset man diesen Satz auf eben die Art, wenn man, anstatt der Rechtecke, die rechtwincklichten Dreyecke abc, def beschreibt. Fig. 103.

Lehrsatz.

§. 459. Die Verhältniß der Parallelogrammen oder der Dreyecke ABC : abc, ist aus der Fig. 104.

Verhält-

Verhältniß der Grundlinien BC: bc, und aus der Verhältniß der Höhen AG: ag, zusammengesetzt.

Beweis.

Vor die Parallelogrammen beschreibe man ein drittes Parallelogramm DEF, dessen Höhe der Höhe AG gleich sey, und dessen Grundlinie EF = bc, so ist

ABC: DEF = BC: bc (§. 457.).

und DEF: abc = AG: ag (§. 458.).

folglich allerdings die Verhältniß ABC: abc aus den Verhältnissen BC: bc und AG: ag zusammengesetzt. (§. 157.). Von den Dreyecken wird der Beweis eben so geführet, wenn man anstatt des Parallelogrammen, das Dreyeck DEF gebrauchet.

Der 1. Zusatz.

§. 460. Sind also die Verhältnisse der Grundlinien und der Höhen durch Zahlen ausgedrückt, so bringt man die Verhältniß der Parallelogrammen oder der Dreyecke heraus, wenn man diese Zahlen gehörig in einander multipliciret. (§. 170.). Es sey BC: bc = 3: 5, und AG: ag = 4: 7. so ist ABC: abc = 3 × 4: 5 × 7 = 12: 35, man mag die Dreyecke, oder die Parallelogrammen welche mit eben den Buchstaben bezeichnet sind, nehmen.

Der

Der 2. Zusatz.

§. 461. Wird aber eine gerade Linie Q gesucht, deren Verhältniß zu einer andern gegebenen, oder nach Willkühr anzunehmenden geraden Linie P, der Verhältniß eines Parallelogrammen zu einem andern, oder eines Dreyecks zu einem andern, gleich sey; so mache man (§. 401.) BC: bc = P: X, und

AG: ag = X: Q,

und es wird sich die angenommene P, zu der auf diese Art gefundenen Q, wie ABC: abc verhalten. Nimmt man P = BC, so ist X = bc, und Q die vierte Proportionallinie zu AG, ag, und bc.

Der 3. Zusatz.

§. 462. Wenn also BC : bc = ag : AG, das ist, wenn die Höhen der Parallelogrammen, oder der Dreyecke, den Grundlinien verkehrt genommen proportional sind, so sind die Parallelogrammen oder die Dreyecke einander gleich. (§. 176.)

Der 4. Zusatz.

§. 463. Und wenn die Seite des Quadrats DEF, die mittlere Proportionallinie zwischen den Seiten eines Rechtecks ABC ist, so ist das Quadrat dem Rechteck gleich. Denn es ist in diesem Fall AB: DE = EF: BC, das ist, die Höhen sind den Grundlinien verkehrt genommen proportional. Hieraus sieht man, daß es sehr leicht ist, ein Quadrat zu beschreiben, welches einem gegebenen Rechteck, Fig. 105.

eck, oder einem jeden Parallelogramm oder Dreyeck gleich sey. (§. 436.)

Der 5. Zusatz.

§. 464. Wenn die Höhen der Parallelogrammen oder Dreyecke, sich verhalten wie ihre Grundlinien, so ist die Verhältniß der Parallelogrammen, oder der Dreyecke, zweymahl so hoch als die Verhältniß ihrer Grundlinien, oder ihrer Höhen (§. 158.). Hieraus folgt, daß die Verhältniß der Quadrate gegeneinander, allzeit zweymahl so hoch sey als die Verhältniß ihrer Seiten.

Der 6. Zusatz.

Fig. 106. §. 465. In gleichen Parallelogrammen, oder Dreyecken, sind die Grundlinien den Höhen verkehrt genommen, proportional. Das heißt, wenn ABC = abc, so ist BC : bc = ag : AG (§. 177.). Denn es ist hier die Verhältniß, welche aus den beiden BC : bc und AG : ag zusammengesetzt wird, die Verhältniß zwoer gleichen Grössen.

Lehrsatz.

Fig. 107. §. 466. In einem jeden rechtwincklichten Dreyeck BAC, ist das Quadrat der größten Seite BC, so groß als die Quadrate der beiden übrigen Seiten BA und AC zusammengenommen.

Beweis.

Beweis.

Man beschreibe die Quadrate BDEC, AF und AG, und ziehe aus der Spitze des rechten Winckels die gerade Linie AH auf BC senckrecht, so wird dieselbe wenn man sie verlängert, das Quadrat BE in zwey Rechtecke BDKH, HKEC theilen. Es ist aber alsdenn BH : BA = BA : BC oder BD, und HC : CA = CA : BC oder CE (§. 436.). Also wird das Quadrat der Seite BA, welches AF ist, dem Rechteck BDKH, und das Quadrat der Seite CA, welches AG ist, dem Rechteck HKEC gleich seyn (§ 463.), und es ist folglich die Summe der Quadrate AF + AG, der Summe der Rechtecke BDKH + HKEC, oder dem Quadrat BDEC gleich.

Der 1. Zusatz.

§. 467. Hieraus lernt man ein Quadrat beschreiben, welches zwey gegebenen Quadraten gleich sey, und diesem ferner eines oder mehrere Quadrate zusetzen, so daß man endlich ein Quadrat herausbringt, welches einer jeden Summe von gegebenen Quadraten gleichet. Denn wenn die zwey ersten Quadrate AF, AG sind, und man legt die Seiten derselben unter einem rechten Winckel aneinander, so wird BC die Seite des Quadrats, welches jenen beiden zusammengenommen gleich ist. Braucht man nun ferner diese gefundene Seite anstatt AC, und anstatt AB die Seite des dritten Quadrats von denen

denen die man zusammensetzen soll, so wird man wenn man wie vorhin verfährt, anstatt BC, die Seite des Quadrats erhalten, welches den drey zusammengesetzten gleich ist. Und wenn diese Arbeit fortgesetzet wird, bringt man zuletzt alle gegebene Quadrate, so viel deren seyn mögen, in eines zusammen.

Der 2. Zusatz.

§. 468. Soll man aber von einem Quadrat, dessen Seite AB ist, das Quadrat der Seite CD abziehen, und es wird die Seite des Quadrats gesucht, welches dem Ueberschuß gleich ist, so beschreibe man auf AB einen halben Cirkel, und lege in denselben von dem Punct A an, die Sehne AE = CD. Alsdenn ist EB die gesuchte Seite, weil das Quadrat derselben, mit dem Quadrat der Seite AE zusammen, dem Quadrat von AB gleich ist (§. 373.).

Lehrsatz.

§. 469. Die Verhältniß ähnlicher Dreyecke gegeneinander, ist zweymahl so hoch, als die Verhältniß ihrer Seiten, welche zwischen gleichen Winckeln liegen, oder gleichen Winckeln entgegengesetzt sind.

Beweis.

Fig. 109. 110. In den ähnlichen Dreyecken ABC, abc seyn die Winckel B, b, und C, c einander gleich; man habe BC, bc vor die Grundlinien angenommen, und

und auf dieselben die Höhen AD, ad herabgezogen: so werden auch die rechtwincklichten Dreyecke ABD, abd, und ADC, adc ähnlich seyn (§. 407.), und daher BD : bd = AD : ad, und DC : dc = AD : ad, folglich auch BD + DC : bd + dc = AD : ad, oder BD — DC : bd — dc = AD : ad, (§. 161.). Es ist also in den beiden Fällen, welche die Zeichnungen darstellen, BC : bc = AD : ad, das ist, die Höhen der Dreyecke verhalten sich wie ihre Grundlinien; und folglich ist die Verhältniß der Dreyecke selbst (§. 464.) zweymahl so hoch als die Verhältniß ihrer Grundlinien, oder ihrer Seiten BC, bc, welche gleichen Winckeln entgegengesetzt sind.

Der 1. Zusatz.

§. 470. Hieraus folgt, daß die Verhältniß aller ähnlichen Figuren als ABCD, abcd gegeneinander, zweymahl so hoch sey, als die Verhältniß der Linien AB : ab, oder AC : ac, welche in beiden Figuren auf einerley Art an gleichen Winckeln liegen. Denn wenn man die Figuren in ähnliche Dreyecke theilet, so ist die Verhältniß eines jeden Dreyecks in der Figur ABCD, zu dem ihm ähnlichen Dreyeck in der Figur abcd, zweymahl so hoch als die Verhältniß AB : ab, oder AC : ac. Also haben auch die Summen aller Dreyecke in der ersten Figur, das ist, die Figur ABCD selbst, und die Summen aller Dreyecke in der zwoten Figur, das ist, die Figur Fig. 111.

abcd selbst, eben diese Verhältniß gegen einander. §. 161.

Der 2. Zusatz.

§. 471. Auch ist die Verhältniß der ähnlichen ordentlichen Figuren, und ähnlicher Theile derselben, zweymahl so hoch als die Verhältniß der Halbmesser von den Cirkeln, in welche, oder um welche die Figuren beschrieben werden.

Der 3. Zusatz.

§. 472. Die Verhältniß der Cirkel ist zweymahl so hoch, als die Verhältniß ihrer Durchmesser oder Halbmesser: und eben diese Verhältniß gegeneinander, haben ähnliche Ausschnitte, und ähnliche Abschnitte (§. 418.).

Der 4. Zusatz.

§. 473. Auch ist die Verhältniß der ähnlichen Ausschnitte und Abschnitte gegeneinander, zweymahl so hoch, als die Verhältniß der Sehnen von ihren Bogen. (§. 418.).

Der 5. Zusatz.

§. 474. Da aber eine Verhältniß, welche zweymahl so hoch ist, als die Verhältniß zwoer gerader Linien A und B, allzeit der Verhältniß der Quadrate gleich ist, deren Seiten diese gerade Linien sind (§. 464.), so verhalten sich auch alle ähnliche Figuren gegeneinander, wie die Quadrate derjenigen von ihren Seiten, deren Verhältniß halb so hoch ist, als die Verhältniß der Figuren; und die Cirkel verhalten sich, wie die Quadrate ihrer Durchmesser oder Halbmesser.

Aufgabe.

§. 475. **Eine Figur zu beschreiben, welche zwoen ähnlichen Figuren ähnlich, und beiden zusammengenommen, gleich sey.**

Auflösung.

Die gegebenen ähnlichen Figuren ABCD, abcd, sollen auf die eben benannte Art vereinigt werden. Man nehme nach Willkühr die Seiten AB, ab, welche in beiden Figuren in Ansehung der gleichen Winckel auf einerley Art liegen, oder auch ähnlichliegende Diagonallinien der Figuren, und beschreibe ein rechtwincklichtes Dreyeck EFG, in welchem sey EF = AB und FG = ab. Auf die größte Seite EG dieses Dreyecks, beschreibe man eine Figur EGHI, welche einer der gegebenen ABCD ähnlich sey, und zwar so, daß EG in Ansehung der Winckel dieser Figur, welche den Winckeln der Figur ABCD gleich sind, auf eben die Art liege, wie AB in jener Figur, in Ansehung jener Winckel liegt; so ist EH = AC + ac. Fig. 112.

Beweis.

Denn wenn man das Quadrat der Seite AB, auf diese Art bezeichnet, ABq, und abq das Quadrat von ab bedeuten läßt, so ist ABq : abq = AC : ac (§. 470. 474.), folglich ABq + abq : ABq = AC + ac : AC, (§. 160.). Da nun EF = AB und FG = ab, und EFq + FGq = EGq (§. 466.); so ist auch ABq + abq = EGq, und EGq : ABq = AC + ac : AC. Es ist aber auch EGq : ABq = EH : AC (§. 470.). Folglich EH : AC = AC + ac : AC, und EH = AC + ac.

Der 1. Zusatz.

§. 476. Auf diese Art wird man auch einen Cirkel beschreiben, welcher zween gegebenen Cirkeln gleich sey, wenn man anstatt der Seiten, oder Diagonallinien, die Durchmesser oder Halbmesser der gegebenen Cirkel gebraucht, und aus diesen den Durchmesser oder Halbmesser des gesuchten Cirkels findet. Setzt man diese Arbeit fort, so kan man einen Cirkel beschreiben, welcher einer jeden Summe von gegebenen Cirkeln gleich sey.

Der 2. Zusatz.

§. 477. Es läßt sich auch hieraus leicht die Art herleiten, wie man eine Figur beschreibet, welche zwoen ähnlichen Figuren ähnlich, und dem Unterschiede derselben gleich ist. (§. 468.).

Anmer-

Anmerckung.

§. 478 Wenn ein halber Cirkel gesucht wird, Fig. 113.
welcher zween gegebenen halben Cirkeln ABC, CDE gleich sey, so lege man die Durchmesser dieser letzten, unter einem rechten Winckel an einander, und es ist AE der Durchmesser des verlangten halben Cirkels. Der Umkreis desselben geht durch die Spitze des rechten Winckels C (§. 373.), und es hat also der auf den Durchmesser AE beschriebene halbe Cirkel, mit den kleineren, die Abschnitte AFC, CGE gemeinschaftlich. Wenn man daher dieselben, sowohl von den kleineren halben Cirkeln ABC, CDE, als auch von dem grössern ACE, welcher jenen gleich ist, abzieht, so bleibt die Summe der krummlinichten Figuren ABCF+CDEG, welche die Gestalt eines Monden haben, dem Dreyeck ACE gleich. Dieses ist ein Beyspiel einer gantz Geometrischen Vergleichung einer krummlinichten Figur mit einer geradlinichten. Nimmt man AC dem Durchmesser CE gleich, wodurch die Bogen AFC, CGE Quadranten werden, so werden diese Monden einander gleich, und jeder ins besondre ist mit der Helfte des Dreyecks ACE gleichen Inhalts.

Achter Abschnitt.

Von der Lage der Ebenen.

Erklärung.

§. 479.

Eine Ebene durch gegebene Puncte legen, heißt der Ebene diejenige Lage geben, bey welcher die gegebenen Puncte in dieselbe fallen.

Anmerckung.

§. 480. Man kan durch jede drey Puncte eine Ebene legen; denn daß man sie durch jede zween Puncte legen könne ist von selbst klar: ist aber dieses geschehen, und man dreht die Ebene um diese Puncte, so wird sie endlich den dritten Punct erreichen, wo derselbe auch liegen mag, weil man annimmt, daß die Ebene unbegrentzt sey.

§. 481. Vereinigt man also drey Puncte, was dieselben auch vor eine Lage haben mögen, durch gerade Linien, so entsteht ein Dreyeck, nach der anfangs davon gegebenen Erklärung, nehmlich eine ebene Figur. Denn es fallen diese gerade Linien in die Ebene, welche durch die drey Puncte gehet, und begrentzen einen Theil dieser Ebene: wenn dieses nicht geschähe, so würde man daraus schliessen müssen,

sen, daß diejenige Fläche, welche durch die drey Puncte gelegt worden, keine Ebene sey. (§. 251.).

§. 482. Auch fallen alle gerade Linien, welche von einer von zwoen Parallellinien zu der andern gezogen werden, in die Ebene, in welcher die Parallelen liegen; daß aber diese beide in einerley Ebene gezogen seyn müssen, setzt die Erklärung derselben voraus. (§. 267.)

Lehrsatz.

§. 483. Alle Ebenen, welche man durch drey Puncte A, B, C leget, die nicht in einer geraden Linie sind, fallen zusammen.

Beweis.

Man setze, daß durch die Puncte A, B, C, zwo Fig. 114.
Ebenen gehen, und man ziehe AB, BC. Weil nun die Puncte A, B, sich in beiden Ebenen befinden, so wird auch die gerade Linie AB, man mag sie verlängern wie man will, so wohl als BC, in beide Ebenen fallen (§. 251). Es fallen folglich alle die Puncte dieser Ebenen, welche in den ohne Ende verlängerten geraden Linien AB, BC liegen, zusammen. Man nehme nunmehr einen Punct D in einer von den Ebenen, durch welchen die verlängerten AB, CD nicht gehen, und ziehe in der Ebene, in welcher man D angenommen hat, durch diesen Punct eine gerade

 Linie,

Linie, welche die beiden anfangs gezogenen in E und F schneide. So liegt EF in beiden Ebenen, weil sowohl E als F in beiden Ebenen liegen. Folglich wird auch die verlängerte EF, und der Punct D in derselben, in beiden Ebenen liegen.

Zusatz.

§. 484. Zwo Ebenen können einander, in keiner andern als einer geraden Linie schneiden. Denn wenn das Gegentheil möglich wäre, so könte man in diesem Durchschnitt drey Puncte annehmen, welche alsdenn nicht in einer geraden Linie liegen dürften, und es würden durch diese Puncte zwo Ebenen gehen, die nicht zusammenfielen; dieses kan aber nicht seyn. Also ist der Durchschnitt zwoer Ebenen eine einzige gerade Linie.

Erklärung.

§. 485. Eine gerade Linie AB ist einer Ebene parallel oder gleichlaufend, wenn sie, so sehr sie auch verlängert werden mag, die nach allen ihren Seiten ohne Grentzen ausgedehnte Ebene niemals erreichet.

Lehrsatz.

Fig. 115. §. 486. Die gerade Linie AB, welche auserhalb der Ebene EF liegt, aber einer geraden Linie CD, in dieser Ebene, parallelel ist, wird auch der Ebene EF selbst, und einer jeden geraden

raden Linie, welche in dieser Ebene der Linie CD gleichlaufend ist, parallel seyn.

Beweis

1). Die Parallellinien AB und CD, liegen in einerley Ebene ABCD, und AB kan, so sehr man sie auch verlängern mag, nicht auser dieser Ebene fallen. Soll also AB die Ebene EF erreichen, so muß sie auch die Linie CD schneiden, der sie doch parallel ist, welches nicht seyn kan.

2). Man lege durch AB und einen beliebigen Punct G in der Ebene EF, die Ebene AGHB, welche die Ebene EF in GH schneide. So wird CD, welche der in dieser Ebene gezogenen geraden Linie AB parallel ist, auch der Ebene AH selbst parallel seyn, und die Linie GH nicht schneiden, welche in dieser Ebene AH liegt: (§. 485.). Da nun eben diese CD auch in der Ebene EF liegt, so ist die gerade Linie GH der CD durch den Punct G parallel gezogen (§. 267.). Daß aber auch AB eben dieser GH gleichlaufend sey, sieht man daraus, weil sie beide in einer Ebene ABGH liegen, und einander nicht schneiden können, wenn nicht AB die Ebene EF erreichen soll, welcher sie parallel ist.

Zusatz.

§. 487. Hieraus folgt, daß zwo gerade Linien AB, GH, welche beide einer dritten CD parallel

 sind,

sind, auch in dem Fall einander parallel seyn werden, wenn nicht alle drey Linien in einer Ebene liegen. Denn man kan allzeit durch CD und GH die Ebene EF, durch AB und CD aber die Ebene AD legen: Legt man nun auch durch AB und den Punct G eine Ebene, so muß diese die Ebene EF in der Linie GH schneiden, weil wenn dieses nicht wäre, durch den Punct G zwo gerade Linien in der Ebene EF der CD parallel laufen würden, nehmlich die GH, und der Durchschnitt der Ebenen EF und AH. Es liegt also sowohl AB als GH in der Ebene AH, und diese beide Linien können in dieser Ebene nicht zusammenlaufen, weil wenn AB die GH erreichen solte, sie zugleich die Ebene EF erreichen müßte, der sie parallel ist.

Erklärung.

Fig. 116. §. 488. Eine gerade Linie AB steht gerade oder senckrecht auf der Ebene EF (linea plano recta), wenn, nachdem sie die Ebene in dem Punct B angetroffen hat, sie mit allen geraden Linien, welche durch diesen Punct B in der Ebene EF gezogen werden können, rechte Winckel einschließt. Andre gerade Linien, welche diese Lage in Ansehung der Ebene nicht haben, stehen schief auf derselben.

Lehrsatz.

Fig. 117. §. 489. Wenn eine gerade Linie AB auf zwoen in der Ebene FG gezogenen geraden

Linien

Linien, BC, BD senckrecht stehet, so stehet sie auch auf der Ebene senckrecht.

Beweis.

Wenn man BC, BD verlängert, bis Bc = BC, und Bd = BD, und man zieht hierauf CD, cd, so werden die Dreyecke CBD, cBd, sowohl als die Winckel cdB, CDB gleich (§. 312.). Wird also durch B noch eine andre gerade Linie eE gezogen, so ist auch eB = BE und de = DE (§. 316.). Zieht man aber auch AC, AD und Ac, Ad, so werden die Dreyecke ACD, Acd ebenfalls gleich, folglich auch ihre Winckel bey D, d (§. 319.): daher wenn man auch Ae, AE ziehet, wird Ae = AE (§. 312.). Es haben also die Dreyecke ABE, ABe gleiche Seiten, folglich sind auch ihre Winckel ABE, ABe gleich, und die Linie AB steht auf der eE senckrecht.

Der 1. Zusatz.

§. 490. Durch einen in der Ebene FG gegebenen Punct B kan nur eine einzige gerade Linie AB auf die Ebene senckrecht gestellt werden. Alle andre gerade Linien, welche durch diesen Punct gehen, wie BC, stehen schief auf der Ebene. Denn wenn man durch die Puncte A, B, C eine Ebene leget, welche die Ebene FG in BD schneide, so ist ABD ein rechter Winckel, folglich CBD kleiner als ein rechter. Fig. 118.

Der

Der 2. Zusatz.

§. 491. Auch durch einen auser der Ebene FG
Fig. 119. gegebenen Punct A, kan nur eine einzige gerade Linie AB auf diese Ebene senckrecht herab gezogen werden. Denn wenn man auser der AB noch eine andre gerade Linie AC durch den Punct A leget, welche die Ebene in C schneide, und man ziehet hierauf BC, so ist B ein rechter, folglich C ein spitziger Winckel.

Lehrsatz.

Fig. 120. §. 492. Wenn zwoen geraden Linien AB, CB, welche den Winckel ABC einschliessen, zwo andre gerade Linien DE, FE, welche in dem Punct E zusammenlaufen, parallel sind, so ist der Winckel DEF dem Winckel ABC gleich.

Beweis.

Nachdem man von diesen geraden Linien, die gleichen Theile AB = DE und EF = CB abgeschnitten hat, ziehe man AC, DF, und hierauf AD, BE, CF; so sind AE und CE Parallelogrammen (§. 391.), folglich die geraden Linien AD, CF, welche beide einer Dritten BE gleich und parallel sind, auch unter sich parallel (§. 487.) und einander gleich. Es ist also auch AF ein Parallelogramm, und AC = DF: woraus folgt, daß in den Dreyecken ABC, DEF, welche gleiche

Seiten

Seiten haben, auch die Winckel, welche zwischen gleichen Seiten liegen E, B, gleich sind.

Zusatz.

§. 493. Wenn daher eine Ebene AB, die Ebene AC in der geraden Linie AD schneidet, und man zieht in der Ebene AB die geraden Linien EF, GH der Linie AD senckrecht, und in der Ebene AC, die Linien FI, HK, senckrecht auf eben diese AD, so sind die Winckel EFI, GHK gleich. Fig. 121.

Erklärung.

§. 494. Die Neigung der Ebene AB gegen die Ebene AC, ist der Winckel EFI, oder GHK, welchen zwo gerade Linien einschliessen, deren eine in der Ebene AB, und die andre in der Ebene AC, auf einerley Punct des Durchschnittes beider Ebenen AD senckrecht stehet.

§. 495. Ist dieser Winckel EFI oder GHK ein rechter Winckel, so steht die Ebene AB auf der Ebene AC gerade oder senckrecht (planum plano rectum): ist aber dieses nicht, so steht eine Ebene schief auf der andern.

Lehrsatz.

§. 496. Wenn eine gerade Linie AB auf einer Ebene FG senckrecht stehet, so wird auch eine jede Ebene wie CD, welche man durch AB legen Fig. 122.

gen kan, auf der Ebene FG senckrecht stehen: und wenn die Ebene CD auf der Ebene FG senckrecht steht, so steht die gerade Linie AB, welche in der Ebene CD dem Durchschnitt der beiden Ebenen BC perpendicular ist, auch auf der Ebene FG senckrecht.

Beweis.

Man ziehe in der Ebene FG, die gerade Linie BE auf den Durchschnitt der Ebenen CB perpendicular. Steht nun AB auf der Ebene FG senckrecht; so steht sie zugleich senckrecht auf BC und auf BE (§. 488.), folglich steht die Ebene CD auf der Ebene FG senckrecht (§. 495.).

Steht aber die Ebene CD senckrecht auf der Ebene FG, und ABC ist ein rechter Winckel, so ist auch ABE ein rechter Winckel, folglich steht AB, welche zwoen in einer Ebene FG gezogenen geraden Linien BC, BE perpendicular ist, auch auf dieser Ebene selbst senckrecht.

Der 1. Zusatz.

Fig. §. 497. Wenn AB auf die Ebene FG senckrecht
123. fällt, und CD ist der AB parallel, so fällt auch CD auf die Ebene FG senckrecht. Denn die Ebene AD, welche durch die zwo Parallellinien geht, steht senckrecht auf der Ebene FG, weil sie durch die Perpendicularlinie AB gehet, und wenn AD die Ebene

Ebene FG in der Linie BD schneidet, so ist B ein rechter Winckel, folglich auch D (§. 280.). Also ist die Linie CD, welche in der Ebene AD liegt, die auf der Ebene FG senckrecht stehet, dem Durchschnitt beider Ebenen BD perpendicular.

Der 2. Zusatz.

§. 498. Zwo gerade Linien AB, CD, welche auf einer Ebene FG senckrecht stehen, sind parallel. Fig. 124.
Denn wenn sie es nicht wären, so würde durch den Punct D eine andre gerade Linie DE der AB parallel gezogen werden können, welche ebenfalls auf der Ebene FG senckrecht stünde; dieses geht aber nicht an, weil man vorausgesetzt hat, daß CD durch den Punct D auf diese Ebene senckrecht gestellt worden sey (§. 490.).

Der 3. Zusatz.

§. 499. Wenn eine Ebene AB, zwoen Ebenen CD, EF, welche einander in GH schneiden, Fig. 125.
senckrecht ist, so ist dieser Durchschnitt GH der Ebene AB perpendicular. Denn wenn in dieser Ebene die gerade Linie HI dem Durchschnitt HC der Ebenen AB, CD, perpendicular gezogen wird, so ist diese HI, weil sie auf der Ebene CD senckrecht stehet, (§. 496.) auch der in dieser Ebene liegenden geraden Linie HG perpendicular. Und wenn in eben dieser Ebene AB, die HK dem Durchschnitt HF perpendicular gezogen wird, so beweiset man

auf

auf eben die Art, daß diese HK auch der GH perpendicular sey. Folglich steht GH, welche zwoen in der Ebene AB liegenden geraden Linien HI, HK perpendicular ist, auf der Ebene AB selbst senckrecht.

Erklärung.

Fig. 126. §. 500. Ebenen, die nach allen Seiten erweitert, einander niemals erreichen, sind gleichlaufend oder parallel.

Anmerckung.

§. 501. Es können aber zwo Ebenen AB, CD, einander nicht erreichen, wenn eine gerade Linie EF auf beiden senckrecht steht. Denn wenn man durch EF eine Ebene EFGH legt, so ist dieselbe sowohl auf der Ebene AB als auf der Ebene CD senckrecht, und schneidet die eine in der geraden Linie EG, und die andre in FH. Es sind aber diese Linien beide der EF perpendicular, und können nicht zusammenlaufen, welches doch geschehen würde, wenn die Ebenen AB, CD zusammenlaufen könten.

Zusatz.

§. 502. Wenn man zwo gleichlaufende Ebenen AB, CD, durch eine dritte Ebene EH nach Willkühr schneidet, so werden die Durchschnitte EG, FH allzeit parallel. Denn es liegen diese Linien beide in der schneidenden Ebene EH, und sie können nicht

zusam-

zusammenlaufen, weil sie zu gleicher Zeit in den gleichlaufenden Ebenen AB, CD liegen.

Lehrsatz.

§. 503. Wenn zwo in einer Ebene MN liegende gerade Linien FE, GH, zwoen andren geraden Linien AB, AC, welche in der Ebene IK liegen, parallel sind, so werden auch die Ebenen MN, IK gleichlaufend seyn. Fig. 127.

Beweis.

Man stelle auf den Punct A der Ebene IK die gerade Linie Aa senckrecht, welche die Ebene MN in a antrifft, und ziehe durch diesen Punct a, der geraden Linie GH die ac, und der FE die ab parallel. In diesem Fall werden AB und ab, wie auch AC und ac gleichlaufend (§. 487.), und da CAa ein rechter Winkel ist, auch Aac ein rechter Winckel seyn. Es ist aber auch Aab ein rechter Winckel, weil es BAa ist, folglich steht Aa auf der Ebene IK, und zugleich auf der Ebene MN senckrecht; es sind also diese Ebenen gleichlaufend (§. 501.).

Lehrsatz.

§. 504. Wenn die geraden Linien AB, CD durch die gleichlaufenden Ebenen HI, Fig. 128.

KL, MN geschnitten werden, so sind die Theile der Linien, welche zwischen einerley Ebenen liegen, proportional.

Beweis.

Man ziehe die geraden Linien AC, BD und CB; die Fläche des Dreyecks ACB, schneide die Ebene KL in EF, und die nehmliche Ebene KL werde von der Fläche des Dreyecks CBD in FG geschnitten. So sind EF, AC, wie auch BD, FG parallel (§.502.), also in dem Dreyeck ABC, $AE : EB = CF : FB$, und in dem Dreyeck CBD, $CF : FB = CG : GD$ (§. 397.); folglich auch $AE : EB = CG : GD$. Eben so wird bewiesen, daß $AE : AB = CG : CD$, oder $AB : EB = CD : GD$.

Neunter Abschnitt.
Von den Körpern.

Lehrsatz.
§. 505.

Wenn zween die Ebene IK berührende Körper ABCE, EFGH, von einer Ebene geschnitten werden, welche dieser IK parallel ist, und es sind jede zwo Figuren wie bcd, fgh, welche durch einerley Schnitt in beiden Körpern hervorgebracht werden, einander gleich, so sind auch die Körper gleichen Inhalts. Fig. 129.

Beweis.

Denn es folgt aus dem, was vorausgesetzt wird, daß wenn eine Ebene LM, welche der gegebenen IK parallel läuft, durch die äusersten Puncte des Körpers ABCD geht, dieselbe auch durch die äusersten Puncte des Körpers EFGH gehen, oder denselben berühren werde, weil sonst die Gleichheit der von einem Durchschnitt hervorgebrachten Figuren wie bcd, fgh zuletzt aufhören würde. Hieraus aber ist klar, daß die beiden Körper, von einer der gleichlaufenden Ebenen LM nach der andern IK, gleiche Ausdehnung haben. Auf der andern Seite zeigt die beständige Gleichheit der ebenen Figuren wie bcd, fgh, daß diese Körper auch nach der Länge und Breite, in jeder Ebene, welche dieselben auf die angezeigte Art schneidet, gleich ausgedehnet sind. Sie können also nicht ungleich seyn.

Anmerckung.

§. 506. Es wird keinesweges gesagt, daß die Körper aus ebenen Figuren zusammengesetzt werden, so wenig als man diese aus Linien zusammen gesetzt hat; sondern man bedient sich der Gleichheit der Figuren bloß, um aus derselben auf die Gleichheit der Körper den Schluß zu machen.

Erklärung.

Fig. 130. §. 507. Wenn eine ebene geradlinichte Figur ABCDE der Ebene LM parallel liegt, und man zieht aus der Spitze eines Winckels dieser Figur, als A, die gerade Linie AF, welche die Ebene LM in F antrifft, worauf man dieser Linie die Parallelen BG, CH, DI, EK, aus den übrigen Winckeln der Figur gleichfalls nach der Ebene LM ziehet, und die Puncte F, G, H, I, K, durch gerade Linien verbindet, so heißt der Körper, welchen die Figuren ABCDE, FGHIK und AG, GC, CI,

IE,

IE, EF begrentzen, ein Prismatischer Körper, oder ein Prisma; die Figuren ABCDE, FGHIK sind die Grundflächen (Bases), und die übrigen die Seitenflächen desselben (Latera).

Der 1. Zusatz.

§ 508. Die geraden Linien AB, FG, in welchen die durch zwo Parallellinien gehende Ebene AFGB, zwo gleichlaufende Ebenen schneidet, sind selbst parallel (§. 502.). Also sind die Seitenflächen eines Prisma Parallelogrammen, und die Zahl derselben ist mit der Zahl der Seiten der Grundfläche einerley; auch ist AB = FG, BC = GH und so ferner. Es sind aber auch die von Parallellinien eingeschlossene Winckel gleich, ABC = FGH, BCD = GHI und die übrigen (§. 492.); folglich sind die beiden Grundflächen eines Prisma einander gleich und ähnlich.

Der 2. Zusatz.

§. 509. Wenn ein Prisma durch eine Ebene geschnitten wird, welche den Grundflächen parallel läuft, so ist die Figur des Durchschnittes den Grundflächen gleich und ähnlich.

Der 3. Zusatz.

§. 510. Uebrigens steht in einem jeden Prisma die gerade Linie AF senckrecht auf den Grundflächen oder schief. Ist das erste, so stehen auch die übrigen Linien BG, DI, 2c. senckrecht auf den Grundflächen (§. 497.), wodurch die Seitenflächen des Prisma Rechtecke werden, die auf den Grundflächen senckrecht stehen (§. 496.). Steht hingegen AF schief auf den Grundflächen, so stehen auch alle übrigen Linien BG, DI, ꝛc. schief auf denselben.

Erklärung.

§. 511. Ein Prisma, in welchem die geraden Linien AF, BG ꝛc. auf den Grundflächen senckrecht stehen, heißt ein gerades Prisma (Rectum). Die übrigen heissen schiefe.

Erklärung.

§. 512. Sind die Grundflächen eines Prisma Parallelogrammen, so nennt man es ein Parallelepipedum.

Zusatz.

§. 513. Ein Parallelepipedum wird durch sechs Parallelogrammen begrentzt, von denen jegliche zwey, welche einander gerade entgegen stehen, gleich und parallel sind (§. 503). Uebrigens aber können sie rechtwincklichte oder schiefwincklichte Parallelogrammen, von gleichen oder ungleichen Seiten seyn (§. 510.).

Erklärung.

§. 514. Ein gerades Parallelepipedum dessen Grundflächen Rechtecke sind, nennt man ein rechtwincklichtes Parallepipedum. Sind alle die

die Rechtecke, welche dasselbe einschliessen, Quadrate, so heißt es ein Würfel (Cubus.).

Anmerckung.

§. 515. Ein Würfel ist in sechs gleiche Quadrate eingeschlossen. Ein jede Seite von einem dieser Quadrate, heißt auch die Seite des Würfels (Latus Cubi.).

Erklärung.

§. 516. Wenn §. 507., anstatt der geradlinichten Figuren, gleiche Cirkel zu Grundflächen angenommen werden, deren Mittelpuncte die gerade Linie AB verknüpfet, und man legt um die Umkreise beider Cirkel eine krumme Oberfläche von der Beschaffenheit, daß eine jede, der AB, durch einen Punct des Umkreises von einer oder der andern Grundfläche, parallel gezogene Linie, gantz in diese Oberfläche fällt: so heißt der durch die beiden Cirkel und diese krumme Oberfläche begrentzte Körper ein Cylinder, und AB ist seine Axe. Fig. 131.

Anmerckung.

§. 517. Der Cylinder ist ein Prisma, welches zur Grundfläche eine ordentliche Figur von unendlich vielen Seiten hat. Schneidet man also den Cylinder durch eine Ebene, welche den Grundflächen parallel ist, so entsteht ein den Grundflächen gleicher Cirkel (§. 509.). Die Axe des Cylinders steht senckrecht, oder schief auf den Grundflächen.

Erklärung.

§. 518. Ein Cylinder dessen Axe auf den Grundflächen senckrecht steht, heißt ein gerader Cylinder. Steht aber die Axe schief auf den Grundflächen, so ist auch der Cylinder schief.

Anmerckung.

§. 519. Ein gerader Cylinder entsteht auch, wenn man ein Rechteck um eine unbewegliche Seite desselben drehet. Dieses ist aber von einem schiefen Cylinder nicht zu sagen.

Lehrsatz.

Fig. 132. §. 520. Prismata und Cylinder, wie AB, CD, sind einander gleich, wenn sie zwischen zwoen gleichlaufenden Ebenen EF, GH stehen, und wenn ihre Grundflächen gleich sind.

Beweis.

Denn wenn man diese beiden Körper durch eine Ebene schneidet, welche den Grundflächen parallel ist, so kommen überall gleiche Durchschnitte (§. 509.). Also sind die Körper gleich (§. 505.).

Der 1. Zusatz.

§. 521. Würfel, deren Seiten gleich sind, sind selbst einander gleich, und gleiche Würfel haben gleiche Seiten.

Der 2. Zusatz.

§. 522. Man kan zu einer jeden gegebenen Breite der Grundfläche ein rechtwincklichtes Parallelepipedum beschreiben, welches einem gegebenen Prisma oder Cylinder gleich sey. Es sey ABC das gegebene Prisma, und die Breite der Grundfläche des Parallelepipedum sey DE. Wenn man nun in der erweiterten Grundfläche AB des Prisma, ein Rechteck DEF beschreibt, welches der Grundfläche AB des Prisma gleich ist, so wird das Parallelepipedum DEG, welches die Grundfläche DEF hat, und dessen Höhe EH mit der Höhe des Prisma ABC einerley ist, diesem Prisma gleich seyn. Fig. 133.

Anmerckung.

§. 523. Man versteht nehmlich durch die Höhe eines Prisma, oder eines Cylinders, die gerade Linie, welche von einer Grundfläche eines Prisma oder Cylinders, auf die andre senckrecht gezogen wird. Daher haben solche Prismata und Cylinder, deren Grundflächen in einerley erweiterte Ebenen fallen, das heißt, welche zwischen einerley gleichlaufenden Ebenen stehen können, gleiche Höhen; und wenn diese Körper gleiche Höhen haben, so können ihre Grundflächen in einerley erweiterte Ebenen fallen.

Lehrsatz.

§. 524. Wenn die Grundflächen der Cylinder und Prismatischen Körper gleich sind, so verhalten sich die Körper selbst gegeneinander wie ihre Höhen.

Beweis.

Fig. 134. Es sey die Grundfläche AB des Prisma ABC der Grundfläche des Prisma DEF gleich, dessen Höhe EF ist. Man mache BG = EF, und schneide das Prisma ABC durch G, mit einer Ebene, welche den Grundflächen parallel sey. So ist das abgeschnittene Prisma ABGH dem Prisma DEF gleich (§. 520.). Man theile ferner BC in eine beliebige Anzahl gleicher Theile, und lege durch einen jeden Theilungs-Punct eine Ebene der Grundfläche BA parallel. Die Prismata, in welche AC hiedurch zertheilet wird, sind alle gleich. Die Ebene GH aber, oder die zwote Grundfläche des Prisma ABGH, geht entweder durch einen von den Theilungs-Puncten der Höhe BC, oder nicht. Geschicht das erste, so ist klar, daß in der Höhe BG so viele Theile enthalten sind, als in dem Prisma ABGH, und in der Höhe BC so viele Theile, als in dem Prisma ABC. Geht aber die Ebene GH durch keinen der Theilungs-Puncte von BC, so kan doch, wenn man die Zahl dieser Puncte ändert,

und übrigens alles macht wie vorher, unmöglich die Höhe BG mehrere oder wenigere Theile von BC enthalten, als das Prisma ABGH Theile des Prisma ABC enthält; es ist also in beiden Fällen ABGH : ABC = BG : BC (§. 141. 146.), folglich auch DEF : ABC = EF : BC.

Lehrsatz.

§. 525. **Prismata und Cylinder von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundflächen, man mag diese Körper untereinander vergleichen wie man will, und man mag sie gerade oder schief annehmen.**

Beweis.

Es seyn die rechtwincklichten Parallelepipeda ABCD, abcd von gleicher Höhe, und es seyn noch außerdem die Seiten ihrer Grundflächen BC, bc, gleich; so ist auch das Rechteck BD mit dem Rechteck bd gleiches Inhalts, und die Grundfläche ABC verhält sich zu der Grundfläche abc, wie AB : ab (§. 458.). Nimmt man aber BD, bd zu Grundflächen an, so werden AB, ab die Höhen, und es ist offenbar AD : ad = AB : ab (§. 524.); folglich auch AD : ad = ABC : abc. Wenn nun anstatt AD ein andres Prisma P genommen wird, dessen Grundfläche B der Grundfläche ABC, und seine Höhe der Höhe CD gleich Fig. 85.

ey;

sey; und man setzt an die Stelle von ad ebenfalls ein andres Prisma p, dessen Grundfläche b sey = abc, und seine Höhe = cd, so wird P = AD, p = ad (§. 520.), und B : b = ABC : abc = AB : ab; folglich auch P : p = B : b.

Lehrsatz.

§. 526. **Ein jedes Prisma und ein jeder Cylinder wird mit einem andern Prisma, oder Cylinder verglichen, wenn man die Verhältnisse der Grundflächen und der Höhen zusammensetzt.**

Beweis.

Fig. 136. Es sey der Cylinder ABC, dessen Grundfläche B und dessen Höhe A ist, mit dem Prisma DEF zu vergleichen, dessen Grundfläche durch b, und seine Höhe durch a ausgedrückt wird. Man stelle sich einen dritten Körper GHI von eben der Gattung vor, dessen Grundfläche, der Grundfläche B des Körpers ABC, und dessen Höhe der Höhe a des Körpers DEF gleich sey; so ist ABC : GHI = A : a (§. 524.) und

GHI : DEF = B : b (§. 525.).

Hieraus ist der Satz klar (§. 157.).

Der 1. Zusatz.

§. 527. Es wird also die Verhältniß eines Prisma oder Cylinders zu einem andern Körper von dieser

dieser Gattung sehr leicht gefunden, wenn die Verhältniß ihrer Grundflächen und ihrer Höhen gegeben ist, es mögen nun diese Verhältnisse durch Zahlen (§. 170.) oder durch gerade Linien gegeben seyn (§. 401.).

Der 2. Zusatz.

§. 528. Wenn die zu vergleichenden Körper rechtwincklichte Parallelepipeda ABCD, abcd sind, so ist die Verhältniß der Grundflächen, aus den Verhältnissen ihrer Seiten AB : ab und BC : bc zusammengesetzt (§. 459.), folglich wird die Verhältniß der Körper selbst, aus den dreyen Verhältnissen AB : ab, BC : bc, und CD : cd zusammengesetzt seyn, welche Anzahl man vermindern kan, wenn einige von den vorhergehenden Gliedern, einigen von den nachfolgenden gleich sind (§. 174.). Fig. 137.

Der 3. Zusatz.

§. 529. Hieraus folgt, daß die Verhältniß der Würfel dreymahl so hoch ist, als die Verhältniß ihrer Seiten. Denn wenn man ein rechtwincklichtes Paralielepipedum in einen Würfel verwandeln will, muß AB = BC = CD genommen werden.

Der 4. Zusatz.

§. 530. Wenn die Grundflächen der Prismatischen Körper einander ähnlich sind, so ist die Verhältniß dieser Grundflächen zweymahl so hoch als die Verhältniß ihrer ähnlichliegenden Seiten (§. 470.).

470.). Folglich wird die Verhältniß der Körper selbst, aus einer Verhältniß, welche zweymahl so hoch ist als die Verhältniß solcher Seiten, und aus der Verhältniß der Höhen der Körper, zusammengesetzt.

Der 5. Zusatz.

§. 531. Daher auch die Verhältniß der Cylinder gegeneinander, aus einer Verhältniß, welche zweymahl so hoch ist, als die Verhältniß der Durchmesser ihrer Grundflächen, und aus der Verhältniß der Höhen der Cylinder, zusammengesetzt wird.

Der 6. Zusatz.

§. 532. Die Verhältniß solcher Prismatischen Körper, deren Grundflächen ähnlich sind, und deren Höhen sich, wie die ähnlichliegenden Seiten der Grundflächen verhalten, ist dreymahl so hoch, als die Verhältniß dieser Seiten. Denn es ist die Verhältniß der Grundflächen zweymahl so hoch, als die Verhältniß ihrer Seiten, und mit dieser muß noch die Verhältniß der Höhen zusammengesetzt werden, welche der Verhältniß eben dieser Seiten gleich angenommen wird.

Der 7. Zusatz.

§. 533. Die Verhältniß aller Cylinder, deren Höhen sich verhalten wie die Durchmesser ihrer Grundflächen, ist dreymahl so hoch, als die Verhältniß dieser Durchmesser oder dieser Höhen.

Der 8. Zusatz.

§. 534. Alle Körper aber, deren Verhältniß dreymahl so hoch ist, als die Verhältniß einiger ähnlichliegender Seiten derselben, verhalten sich auch gegeneinander, wie die Würfel solcher Seiten.

Der 9. Zusatz.

§. 535. Wenn man zwey Prismata oder Cylinder, oder ein Prisma und einen Cylinder annimmt, deren Grundflächen B, b, und deren Höhen A, a sind, so werden diese Körper einander gleich seyn, wenn sich die Grundflächen verhalten wie die Höhen verkehrt genommen, das ist, wenn B : b = a : A (§. 176.).

Der 10. Zusatz.

§. 536. Und wenn dergleichen Körper gleich sind, so ist B : b = a : A, das heißt, ihre Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen verkehrt genommen (§. 177.).

Erklärung.

§. 537. Wenn an die Spitzen aller Winckel einer ebenen geradlinichten Figur ABCDE, von einem auserhalb der Ebene, in welcher die Figur liegt, angenommenen Punct F, gerade Linien FA, FB rc. gezogen werden, so heißt der Körper, welcher durch die ebene Figur ABCDE, und durch die Dreyecke Fig. 138.

ecke F A B, F B C, F C D ꝛc. begrenzt wird, eine Pyramide. A B C D E ist die Grundfläche, und die Dreyecke F A B, F B C ꝛc. sind die Seitenflachen derselben.

Anmerckung.

§. 538. Die Zahl der Seitenflächen einer Pyramide, ist mit der Zahl der Seiten ihrer Grundfläche einerley. Also giebt es dreyseitige, vierseitige, fünfseitige Pyramiden u. s. f.

Erklärung.

Fig. 139. §. 539. Wenn man anstatt der geradlinichten Grundfläche einen Cirkel annimmt, dessen Mittelpunct A, und der Punct auser demselben B ist, und man leget von dem Umkreise des Cirkels an, bis an den Punct B eine krumme Oberfläche, in welche alle gerade Linien fallen müssen, die wie BC, BD, von dem Punct B an den Umkreis des Cirkels gezogen werden können; so heißt der von dem angenommenen Cirkel und dieser krummen Oberfläche begrenzte Körper ein Kegel (Conus), und der Cirkel CD die Grundfläche desselben.

§. 540. Die gerade Linie BA, welche den Mittelpunct der Grundfläche mit der Spitze des Kegels B verknüpfet, nennt man die Axe des Kegels; steht diese senckrecht auf der Grundfläche, so ist der Kegel gerade, außerdem aber schief.

Anmer-

Anmerckung.

§. 541. Ein Kegel ist eine Pyramide von unendlich vielen Seiten. In einem geraden Kegel, sind alle gerade Linien, wie BC, BD, welche aus dem Punct B an den Umkreis der Grundfläche gezogen werden können, einander gleich. Also entsteht auch ein gerader Kegel, wenn man ein rechtwincklichtes Dreyeck ABC um eine von den Seiten, welche den rechten Winckel einschliessen, BA, drehet. Ein schiefer Kegel aber kan auf diese Art nicht hervorgebracht werden. Fig. 140.

Erklärung.

§. 542. In einem geraden Kegel heißt eine jede gerade Linie wie BC, welche aus der Spitze an den Umkreis der Grundfläche gezogen werden kan, die Seite des Kegels. (Latus coni).

Lehrsatz.

§. 543. Wenn eine Pyramide ABCDE, durch eine Ebene geschnitten wird, welche der Grundfläche parallel läuft, so ist der Durchschnitt bcdef der Grundfläche ähnlich. Fig. 141.

Beweis.

Denn es ist bc der Seite BC, und cd der Seite CD parallel (§. 502.), folglich der Winckel bcd, dem Winckel BCD gleich (492.), und eben so verhält es sich in dem gantzen Umfang der Figuren. Ferner ist in dem Dreyeck ABC, die Seite BC : bc = AC : Ac, und in dem Dreyeck ACD ist AC : Ac = CD : cd (§. 397. 408.), folglich BC : bc = CD : cd. Alle Figuren aber sind einander ähnlich, in welchen gleiche Winckel von Proportionallinien eingeschlossen werden. (§. 404.).

Der 1. Zusatz.

§. 544. Es ist also die Verhältniß des Durchschnittes bcdef zu der Grundfläche BCDEF, zweymahl so hoch als die Verhältniß der Seiten bc : BC (§. 470.); und da diese Verhältniß der Verhältniß Ac : AC gleich ist, so ist auch die Verhältniß des Durchschnittes zu der Grundfläche zweymahl so hoch als diese Verhältniß Ac : AC. Der Umfang des Durchschnittes aber, verhält sich zu dem Umfang der Grundfläche wie Ac : AC, oder wie Ab : AB.

Der 2. Zusatz.

Fig. 142. §. 545. Wenn ein Kegel ABC durch eine Ebene geschnitten wird, welche seiner Grundfläche parallel läuft, so entsteht ein Cirkel bc, dessen Verhältniß zu der Grundfläche BC zweymahl so hoch ist, als die Verhältniß Ab : AB. Der Umkreis des Durchschnittes aber, verhält sich zu dem Umkreise der Grundfläche wie Ab : AB.

Lehr-

Lehrsatz.

§. 546. Alle Kegel und Pyramiden, wie ABC, DEF, welche zwischen einerley gleichlaufenden Ebenen GH, IK, auf gleichen Grundflächen BC, EF stehen, sind einander gleich. Fig. 143.

Beweis.

Denn wenn beide Körper durch einerley Ebene LM geschnitten werden, welche den Grundflächen parallel ist, und hiedurch die Schnitte bc und ef entstehen, so ist die Verhältniß bc : BC zweymahl so hoch als die Verhältniß Ab : AB, und ef : EF zweymahl so hoch als die Verhältniß De : DE. Nun sind die Verhältnisse Ab : AB und De : DE gleich (§. 504.); also ist auch bc : BC = ef : EF, und bc : ef = BC : EF. Und da BC = EF, so ist auch bc = ef. Es sind aber alle Körper einander gleich, in welchen alle Durchschnitte, die einer einzigen Ebene parallel liegen, gleich sind. (§. 505.).

Zusatz.

§. 547. Man kan also eine dreyseitige Pyramide machen, oder sich wenigstens vorstellen, welche einer jeden gegebenen Pyramide oder einem jeden gegebenen Kegel gleich sey.

Lehrsatz.

§. 548. Ein Prisma oder ein Cylinder, ist dreymahl so groß als eine Pyramide oder ein Kegel, dessen Grundfläche und Höhe, der Grundfläche und der Höhe des Prisma oder Cylinders gleich ist.

Beweis.

Man bezeichne das Prisma oder den Cylinder durch P, und die Pyramide, oder den Kegel durch Q; es bedeute ferner B eine Figur, welche den Grundflächen beider Körper P und Q gleich sey,
Fig. 144. und die Höhe dieser Körper sey A. Man mache ein dreyseitiges gerades Prisma ABCDEF, dessen Grundfläche ABC oder DEF sey = B, und die Höhe AD = CF = BE = A; so ist dieses Prisma dem angenommenen P gleich (§. 520.). Nunmehr ziehe man DB, DC, und stelle sich die Pyramide ABCD vor, welche, da ihre Grundfläche ABC = B und ihre Höhe AD = A ist, dem Körper Q gleich seyn wird (§. 546.). Man behauptet, daß in diesem Fall das Prisma ABCDEF dreymahl so groß sey als die Pyramide ABCD. Denn wenn man die Grundfläche BF der noch übrigen Pyramide CBEFD, durch die Diagonallinie CE schneidet, so wird, weil BF, als die Seitenfläche eines geraden Prisma

ma, ein Rechteck ist, CBE = CFE, folglich die Pyramide DCBE der Pyramide DCEF gleich, weil sie auch beide einerley Höhe haben. Nimmt man aber DEF vor die Grundfläche der Pyramide DCEF an, wodurch CF die Höhe derselben wird, so ist klar, daß sie der Pyramide ABCD gleich sey. Folglich ist das Prisma ABCDEF dreymahl so groß als die Pyramide ABCD, und allzeit $P = 3Q$.

Der 1. Zusatz.

§. 549. Wenn man daher auf eine Grundfläche $= B$ ein Prisma, oder einen Cylinder setzet, dessen Höhe $\frac{1}{3}A$ sey, so ist dieser Körper einer Pyramide oder einem Kegel gleich, welcher eben die Grundfläche B, und die gantze Höhe A hat.

Der 2. Zusatz.

§. 550. Da man auf diese Art die Pyramiden und Kegel in Prismata oder Cylinder zu verwandeln weis, so kan man sie leicht mit andern Pyramiden und Kegeln, sowohl als mit Cylindern und Prismatischen Körpern vergleichen. Und es ist überhaupt die Verhältniß einer Pyramide oder eines Kegels, zu einer andern Pyramide oder Kegel, aus Verhältnissen ihrer Grundflächen und Höhen zusammengesetzt; hingegen setzt man die Verhältniß eines Kegels oder einer Pyramide, zu einem Cylinder oder Prisma, aus der Verhältniß der

Grundfläche des Kegels oder der Pyramide zu der Grundfläche des Cylinders oder des Prisma, und aus der Verhältniß des dritten Theils der Höhe des Kegels oder der Pyramide, zu der gantzen Höhe des Cylinders oder Prisma, zusammen.

Erklärung.

Fig. 145. § 551. Wenn man den Quadranten eines Cirkels, ABC, um seinen Halbmesser AC als um eine Axe bis in ADC drehet, so nennen wir den Körper ABDC, welcher auf der Grundfläche BCD stehet, und außer den beiden Quadranten ABC, ADC, durch die krumme Oberfläche ABD begrentzt wird, den Ausschnitt einer Halbkugel (Sector hæmisphærii.). Die Halbkugel selbst entsteht, wenn man diesen Quadranten so lange drehet, bis er in seine vorige Lage kommt, wodurch CB einen Cirkel beschreibet, welcher die Grundfläche der Halbkugel ist. Dreht man anstatt des Quadranten einen halben Cirkel auf die zuerst angezeigte Art, so entsteht der Ausschnitt einer Kugel (Sector Sphæræ); und die Kugel selbst, wenn man den halben Cirkel gantz um seinen Durchmesser herum drehet.

Anmerckung.

§. 552. Die Grundfläche des Ausschnittes einer Halbkugel, ist der Ausschnitt eines Cirkels, dessen

sen Winckel DCB die Neigung der Ebene ABC auf die Ebene ADC anzeigt: und wenn der Ausschnitt einer Halbkugel durch eine Ebene geschnitten wird, welche der Grundfläche parallel läuft, so ist der Durchschnitt b c d ebenfalls ein Ausschnitt von einem Cirkel, und der Grundfläche ähnlich; übrigens desto kleiner als diese, je mehr er sich von dem Mittelpunct C entfernet.

§. 553. Wenn aber in einem halben Cirkel ABC, welcher, wenn er um seinen Durchmesser AB gedrehet wird, eine Kugel beschreibt, zwo gerade Linien DB, EF auf den Durchmesser AC senckrecht, folglich einander parallel, gezogen sind, so beschreibt jede derselben bey dem Herumdrehen einen Cirkel, auf welchem AC senckrecht stehen wird, und dieser Cirkel ist desto grösser, je grösser die Halbmesser DB oder EF sind. Es ist aber diejenige von diesen Linien die kleinere, welche am weitsten von dem Mittelpunct G entfernet ist; daher ist der größte unter allen diesen Cirkeln derjenige, dessen Ebene durch den Mittelpunct G gehet; die übrigen sind desto kleiner, je mehr sie sich von dem Mittelpunct entfernen; sie sind aber alle einander parallel. Fig. 146.

§. 554. Schneidet man aber eine Kugel durch eine Ebene, so ist die Figur des Durchschnittes allzeit ein Cirkel, welcher auch auf die vorige Art erzeugt werden kan, wenn man den Durchmesser AC auf die Ebene des Durchschnittes senckrecht stellet. Wenn also eine Kugel durch mehrere gleichlaufende

Ebenen geschnitten wird, so ist unter den Cirkeln, welche hiedurch entstehen, derjenige der größte, dessen Ebene durch den Mittelpunct der Kugel geht, die übrigen sind desto kleiner, je mehr sie sich von dem Mittelpunct entfernen.

§. 555. Zween Cirkel, deren Ebenen durch den Mittelpunct der Kugel gehen, werden gleich seyn. Denn es fallen ihre Mittelpuncte in den Mittelpunct der Kugel, und es sind folglich die Halbmesser dieser Cirkel mit den Halbmessern der Kugel einerley. Es ist also überhaupt ein Cirkel, dessen Ebene durch den Mittelpunct einer Kugel gehet, der größte unter allen Cirkeln, welche durch einen Durchschnitt eben dieser Kugel hervorgebracht werden können.

Erklärung.

§. 556. Der Durchmesser AC heißt die Axe derjenigen Cirkel, welche die auf AC senckrecht stehende Linien DB, EF beschreiben, indem sie sich zugleich mit dem halben Cirkel ABC herumdrehen; auch heißt dieser Durchmesser AC, die Axe der Kugel, welche durch dieses Drehen erzeugt wird. Die äusersten Puncte A, C dieser Axe, sind die Pole der eben benannten Cirkel, und der Grundfläche der Halbkugel, welche der Halbmesser GH durch seinen Umlauf beschreibt.

Lehrsatz.

Lehrsatz.

§. 557. Wenn ein Ausschnitt einer Halb-kugel ABCD, und ein Ausschnitt eines geraden Cylinders EFGH, gleiche und ähnliche Grund-flächen BCD, FGH, und einerley Höhen AB, EF haben, so verhält sich der Ausschnitt der Halbkugel zu dem Ausschnitt des Cylinders wie 2 zu 3. Fig. 147.

Beweis.

Man stelle diese Körper auf einerley Ebene XZ, und es sey IKLM der Ausschnitt eines geraden Kegels, dessen Grundfläche IKL, der Grund-fläche BCD oder FGH gleich und ähnlich, und seine Höhe IM, welche auf der Ebene XZ senck-recht stehet, der Höhe AB oder EF gleich sey. Es stehe ferner auf eben dieser Ebene XZ die Ebene NO senckrecht, und in dieser, werde mit der in der Ebene XZ liegenden Seite PO, welche der Höhe AB gleich ist, ein Quadrat NPOQ, und in dasselbe der Quadrante eines Cirkels NOP beschrieben; so ist auch NP, welche auf der Ebene XZ senckrecht stehet = AB. Nun schneide man die drey Körper durch eine den Grundflä-chen gleichlaufende Ebene, von welcher zugleich die Ebene NO in RT geschnitten werde; so sind die Durchschnitte dbc, hfg, lik alle einander

 ähnlich,

ähnlich, und bd = RS, aber fh = RT = PO = PS, und il = RV = PR; es sind aber diese bd, fh, il, oder RS, PS, PR, ähnlichliegende Seiten der Durchschnitte, deren Quadrate sich wie die Durchschnitte selbst verhalten (§. 474.). Da nun das Dreyeck PRS rechtwincklicht ist, und daher PSq = RSq + PRq (§. 466.); so ist auch allzeit hfg = dbc + lik, folglich der Körper EFGH so groß als die beiden Körper ABCD und IKLM zusammen (§. 505.); und weil der Körper IKLM den dritten Theil des Körpers EFGH ausmacht (§. 548.), so beträgt der Körper ABCD zwey Drittheile dieses Körpers EFGH.

Der 1. Zusatz.

§. 558. Also beträgt auch der körperliche Inhalt einer halben Kugel so viel, als zwey Drittheile eines Cylinders, dessen Grundfläche der Grundfläche der halben Kugel, und dessen Höhe der Höhe der halben Kugel, das heißt, dem Halbmesser, gleich ist; und eine Kugel ist so groß als zwey Drittheile von einem Cylinder, dessen Grundfläche einem von den größten Cirkeln der Kugel, und dessen Höhe dem Durchmesser der Kugel gleichet.

Der 2. Zusatz.

§. 559. Da man auf diese Art dergleichen Körper in Cylinder oder Theile von Cylindern verwandeln, oder sich verwandelt vorstellen kan, so ist es auch sehr leicht, sie untereinander, oder mit Cylindern und Theilen derselben zu vergleichen. Und da überhaupt $\frac{2}{3}$ A: $\frac{2}{3}$ a = A: a, was auch A, a bedeuten mag, so ist die Verhältniß der Halbkugeln, aus den Verhältnißen ihrer Grundflächen und ihrer Höhen zusammengesetzt; weil nun die Verhältniß dieser Grundflächen zweymahl so hoch ist, als die Verhältniß ihrer Halbmesser, die Verhältniß der Höhen aber die Verhältniß der Halbmesser selbst ist, so wird die Verhältniß der Halbkugeln dreymahl so hoch als die Verhältniß ihrer Halbmesser. Eben diese Verhältniß gegeneinander haben auch die gantzen Kugeln, die Ausschnitte der Halbkugeln, deren Grundflächen ähnlich sind, wie auch die Ausschnitte der Kugeln, welche aus zween dergleichen Ausschnitten von Halbkugeln zusammengesetzt sind.

Der 3. Zusatz.

§. 560. Ueberhaupt aber ist, wenn man die drey Körper, welche die Zeichnung vorstellet, durch einerley Ebene schneidet, der Körper Efgh den beiden Abcd + Iikl gleich, und fFGH = bBCD + iklM.

Zehnter Abschnitt.

Von einigen krummen Oberflächen.

Lehrsatz.

§. 561.

Fig. 148. Die Oberfläche eines geraden Cylinders ABC, ist einem Rechteck DEF gleich, dessen Höhe DE der Höhe des Cylinders AB, und dessen Grundlinie EF, dem Umkreise der Grundfläche BC gleichet.

Beweis.

Denn wenn man DE auf eine gerade Linie wie AB leget, welche in der Oberfläche des Cylinders der Axe desselben parallel ist, und sich hierauf den Cylinder in das Rechteck DEF eingewickelt vorstellet, so wird das auf diese Art gekrümmte Rechteck, mit der Oberfläche des Cylinders genau zusammen fallen.

Zusatz.

§. 562. Wenn alles übrige bleibt, und man nimmt EG so groß als ein Theil des Umkreises BH, zieht

zieht aber hierauf GI der ED, und HK der AB parallel; so läßt sich aus dem vorigem Grunde schliessen, daß das Rechteck DG der krummen Oberfläche ABHK gleich seyn werde.

Lehrsatz.

§. 563. Die Oberfläche eines geraden Kegels ABC, ist dem Dreyeck DEF gleich, dessen Höhe DE der Seite des Kegels AB, und dessen Grundlinie EF, dem Umkreise der Grundfläche des Kegels BC gleichet. Fig. 149.

Beweis.

Es sey GHI der Ausschnitt von einem Cirkel, dessen Halbmesser GH=DE, und sein Bogen HI=EF, so ist GH auch der Seite AB des Kegels, der Bogen HI dem Umkreise BC, und der Ausschnitt GHI dem Dreyeck DEF gleich (§. 454.). Legt man aber GH auf AB, und wickelt den Kegel in den Ausschnitt ein, so wird der Ausschnitt die Oberfläche des Kegels decken, folglich auch das Dreyeck DEF=GHI dieser Oberfläche gleich seyn. Fig. 150.

Der 1. Zusatz.

§. 564. Wenn der Kegel ABC durch die Ebene bc der Grundfläche parallel geschnitten wird, und man macht De=Ab, und ziehet ef der Grundlinie

EF

EF parallel, so ist das Dreyeck Def der Oberfläche des Kegels abc gleich. Denn da der Umkreis BC sich zu dem Umkreise des Durchschnittes bc verhält, wie AB : Ab (§. 544.); und EF : ef = DE : de = AB : Ab, so ist auch EF : ef = BC : bc, und da EF = BC, auch die gerade Linie ef dem Umkreise bc gleich.

Der 2. Zusatz.

§. 565. Wenn man daher gleiche Oberflächen von gleichen abziehet, so ist klar, daß die Oberfläche des abgekürzten Kegels (coni truncati) bBCc dem Viereck eEFf gleich seyn werde. Man halbire eE in M, und ziehe MN der Seite EF parallel, welche auch die Seite fF bey N halbiret. Hierauf vollende man das Rechteck EG, so wird dasselbe wegen der Gleichheit der Dreyecke fGN, FgN dem Viereck eEFf, und folglich auch der Oberfläche des abgekürzten Kegels bBCc gleich seyn. Wenn man aber auch bB in K halbiret, wird AK = DM, folglich der Umkreis KL eines der Grundfläche parallel gelegten Durchschnittes, der geraden Linie MN gleich. Es ist also die Oberfläche eines abgekürzten Kegels bBCc, dem Rechteck EG gleich, dessen Höhe = bB, und dessen Grundlinie dem Umkreise KL gleich ist.

Der 3. Zusatz.

§. 566. Wenn in der Oberfläche eines geraden Kegels eine gerade Linie AP aus der Spitze nach Willkühr gezogen wird, und man macht EQ dem

Bogen

Bogen BP gleich, und das übrige alles auf die vorige Art, so ist das Dreyeck DEQ der krummen Oberfläche ABP gleich. Man begreift dieses sowohl, als die daraus zu ziehenden Folgerungen, leicht, wenn man die eben gebrauchten Schlüsse wiederholet.

Lehrsatz.

§. 567. Wenn in einem Rechteck ABCD die gerade Linie EF nach Willkühr gezogen wird, doch so, daß sie auf den Seiten AD, BC schief stehet, und es fällt auf den mittleren Punct derselben G, aus dem Punct H der verlängerten Seite AB, die gerade Linie HG senckrecht: hierauf aber wird das Rechteck ABCD zugleich mit dem Viereck ABFE, um die gemeinschaftliche Axe AB gedrehet: so verhält sich die Oberfläche eines Cylinders, welche CD beschreibt, zu der Oberfläche eines abgekürzten Kegels, welche von EF bey eben dem Umlauf beschrieben wird, wie BC : GH. Fig. 151.

Beweis.

Man ziehe GI auf die Axe AB senckrecht, wodurch diese halbiret wird, und EK ziehe man der Axe parallel; so ist EK = AI, und weil EGH und K rechte Winckel sind, ist EGK + KGH = KGH + H, folglich EGK = H, und das recht-

rechtwincklichte Dreyeck EGK dem rechtwincklichten Dreyeck GHI ähnlich, woraus folgt IG: GH = EK: EG = 2EK: 2EG = AB: EF. Es bedeute P den Umkreis, welchen bey dem Umlauf der Figur, der Punct G beschreibet, und Q den Umkreis, welcher bey eben diesem Umlauf von dem Punct C beschrieben wird, so ist P: Q = IG: BC (§. 419). Da aber die Kegel-Oberfläche, welche EF durch ihrem Umlauf beschreibet, einem Rechteck gleich ist, welches P zur Grundfläche und EF zur Höhe hat, und die Cylindrische Oberfläche, welche von der herumlaufenden DC beschrieben wird, mit einem Rechteck gleiches Inhalts ist, welches Q zur Grundfläche und CD zur Höhe hat (§. 565. 561.); so ist die Verhältniß der Oberfläche des Cylinders zu der Oberfläche des abgekürtzten Kegels, aus den Verhältnissen Q: P und DC: EF, oder aus den Verhältnissen BC: IG und AB: EF oder aus diesen BC: IG und GI: GH zusammengesetzt, folglich der Verhältniß BC: GH gleich (§. 174.).

Lehrsatz.

Fig. 152. §. 568. Wenn in ein Quadrat ABCD ein Quadrante eines Cirkels beschrieben ist, und man hat zwo gerade Linien EF, GH der Grundlinie BC, in willkührlichen Entfernungen von derselben, parallel gezogen, drehet aber

aber hierauf das Quadrat zugleich mit dem Quadranten um die Axe AB, so wird EG ein Stück von einer Kugelfläche, FH aber die Oberfläche eines Cylinders beschreiben, und diese beiden Oberflächen werden einander gleich seyn.

Beweis

Man nehme anstatt des Quadranten den vierten Theil einer ordentlichen Figur, von welcher zween Winckel in E und G fallen, und bezeichne durch P die Entfernung der Seiten dieser Figur von dem Mittelpunct B, und durch R die Seite BC, oder den Halbmesser des Cirkels, in welchen die Figur beschrieben werden kan. Hierauf ziehe man auch IK, LM, der Seite BC parallel, durch alle Winckel des Vielecks, welche zwischen E und G liegen. Wird nun der Theil dieser ordentlichen Figur zugleich mit dem Quadrat um AB gedrehet, und es beschreiben alle die Seiten EI, IL, LG, Kegel-Oberflächen, indem FK, KM, MH, Cylindrische beschreiben, so wird sich eine jede dieser Kegel-Oberflächen, zu der Cylindrischen Oberfläche, welche in der Ordnung gegenüberliegt, verhalten wie P : R (§. 567.). Also verhalten sich auch alle die Kegel-Oberflächen zusammen, oder welches eben so viel ist, die Oberfläche, welche die EG bey ihrem Umlauf beschreibt, zu allen Cylindrischen Oberflächen zusammen, oder zu der Oberfläche, welche die zugleich herumlaufende FH beschreibt, wie P zu R. (§.162.). Wird aber die Anzahl der Seiten der ordentlichen Figur beständig vergrössert, so wächst P beständig, und wird endlich, wenn sich die Seiten der Figur in dem Umkreise eines Cirkels verlieren =R (§. 389.). Ist nun AEC ein Quadrant von diesem Cirkel, so ist die Oberfläche, welche der Bogen EG bey seinem Umlauf um AB beschreibt, der Oberfläche, welche die zugleich herumlaufende gerade Linie FH beschreibet, gleich.

Der 1. Zusatz.

§. 569. Es gleicht also die Oberfläche einer halben Kugel, der Oberfläche eines geraden Cylinders, dessen Grundfläche, der Grundfläche der halben Kugel, und dessen Höhe dem Halbmesser derselben gleich ist. Die Oberfläche aber einer gantzen Kugel hat gleichen Inhalt mit der Oberfläche eines Cylinders, dessen Grundfläche einer von den größten Cirkeln der Kugel, und dessen Höhe der Durchmesser derselben ist.

Der 2. Zusatz.

§. 570. Folglich gleicht die Oberfläche einer Kugel, einem Rechteck, dessen Grundlinie dem Umkreise eines größten Cirkels der Kugel, und dessen

Höhe dem Durchmesser der Kugel gleich ist (§. 561.). Da nun ein größter Cirkel in einer Kugel, einem Rechteck gleichet, dessen Grundlinie der eben benannte Umkreis, und dessen Höhe der vierte Theil des Durchmessers ist (§. 453.), so verhält sich die Oberfläche einer Kugel zu dem größten Cirkel derselben, wie 4: 1.

Der 3. Zusatz.

§. 571. Vergleicht man aber zwo Kugel-Oberflächen mit einander, so verhalten sie sich wie ihre größten Cirkel, folglich ist ihre Verhältniß zweymahl so hoch als die Verhältniß ihrer Durchmesser, oder der Verhältniß der Quadrate ihrer Durchmesser gleich.

Anfangsgründe
der
Geometrischen Berechnungen.

Erster Abschnitt.
die
allgemeine Arithmetick.

Erklärung.
§. 572.

Wenn eine ausgedehnte Grösse, oder irgend eine andere Grösse Q, durch die Zahl N ausgedrückt wird, so verhält sich Q zu einer andern gegebenen oder nach Willkühr angenommenen Grösse M, wie sich die Zahl N zu ihrer Einheit verhält. Man nennt diese Grösse M das Maaß der Grösse Q, welche durch die Zahl N ausgedrückt wird.

Anmer-

Anmerckung.

§. 573. Das Maaß muß mit der Grösse die es messen soll, nothwendig von einerley Art seyn. Eine Linie mißt eine Linie, ein Winckel einen Winckel, eine Oberfläche eine Oberfläche, und ein Körper einen Körper.

§. 574. Die Zahl N welche die Grösse Q ausdrückt, findet man entweder durch das messen, oder man schließt sie aus andern Zahlen. Die Art zu messen, diejenige wenigstens, welche darinn bestehet, daß man das Maaß unmittelbar an die Grösse welche gemessen werden soll, anlegt, hat keine Schwierigkeit, und ist im Anfange der Arithmetick §. 3. betrachtet worden Man bedient sich derselben hauptsächlich bey geraden Linien, und bey solchen krummen, welche man mit geraden Linien vergleichen kan.

§. 575. Da aber das Maaß fast allzeit getheilet werden muß, so hängt von der Zahl der Theile desselben die Bequemlichkeit der Brüche ab, durch welche eine Grösse Q, oder ein Theil derselben ausgedrückt wird. Es ist also rathsam die Zahl der Theile des Maaßes nicht nur klein, sondern auch so anzunehmen, daß sie sich noch durch viele kleinere Zahlen dividiren lasse. Dergleichen sind 12, 30, 60, 2c.

§. 576. Im Gegentheil werden etwas weitläuftigere Berechnungen gar sehr erleichtert, wenn man das Maaß in zehen gleiche Theile theilet; ein jedes von diesen Theilen wieder in zehen, und so beständig. Denn es enthalten die Zahlen, welche aus einem dergestalt getheilten Maaß die Grössen ausdrücken, keine andre als zehntheilige Brüche, und man kan die Theile des Maaßes, deren Zifern in einer dergleichen Zahl auf die Stelle der einzelnen Einheiten folgen, sich eben so leicht vorstellen und in das Gedächtniß fassen, als die Anzahl der gantzen Maaße, deren Zifern vor der Stelle der einzelnen Einheiten vorhergehen; das Maaß selbst mag seyn welches es will. Daher ist es kein Wunder, daß man sich dieser Art zu theilen überall bedienet, wo nicht eingeführte Gewonheiten, oder besondre Ursachen das Gegentheil erfordern.

§. 577. Wenn zwo Linien aus einerley Maaße durch Zahlen ausgedrückt sind, so findet man die Summe der Linien in der Summe dieser Zahlen, und die Differenz der Linien in der Differenz der Zahlen. Drücken die Zahlen 13, 523 und 6, 71 zwo Linien aus, so wird die Linie, welche der Summe dieser Linien gleich ist, durch die Zahl 20, 233 und die Differenz derselben durch die Zahl 6, 813 ausgedrückt.

§. 578. Sind aber drey Linien durch Zahlen gegeben, so findet man die vierte Proportionallinie auf eben die Art, wie man zu dreyen Zahlen die vierte Proportional-Zahl findet. Wenn folgende drey Zahlen 13,25; 19,8; 17,94 drey Linien andeuten, so wird die vierte Proportionallinie durch die Zahl 26, 8 ausgedrückt.

§. 579.

§. 579. Eben so wird zwischen zwo Linien, welche durch die zwo Zahlen 5, 32 und 7, 14 ausgedrückt werden, die mittlere Proportionallinie in der Zahl 6, 16 gefunden, welches die mittlere Proportionalzahl zwischen jenen zwo Zahlen, oder die Quadratwurtzel des Products aus diesen Zahlen ist.

§. 580. Man pflegt aber auch öfters anstatt der Linien oder anderer Grössen, die Zahlen, welche sie ausdrücken zu nennen, und wenn diese Zahlen addiret, oder von einander subtrahiret werden, so sagt man die Grössen, welche diese Zahlen ausdrücken, sind selbst addiret oder subtrahiret worden.

§. 581. Und da, wenn zu der Einheit und zwoen Zahlen 5 und 7 welche Linien ausdrücken, die vierte Proportionalzahl 5 ⨯ 7 oder 35 gefunden werden soll, welche auch die vierte Proportionallinie zu den drey gegebenen Linien ausdrücken wird, eine bloße Multiplication nöthig ist; so sagt man, daß diese vierte Proportionallinie durch die Multiplication einer Linie durch eine andre Linie hervorgebracht werde, ob man gleich eigentlich nur durch Zahlen allein multipliciren kan.

§. 582. Aus diesem Grunde wird auch zuweilen eine Linie, welche zwoen andern proportional ist, von denen die erste durch die Einheit ausgedrückt wird, ein Quadrat genennet, weil die Zahl, welche die dritte Linie ausdrücken wird, eine Quadrat-Zahl ist; als, wenn man zu zwoen Linien, die durch die

Zahlen 1 und 3 gegeben werden, die dritte Proportionallinie suchet, welche die Quadratzahl 9 ausdrücket.

§. 583. In diesem Verstande sagt man auch, daß eine Linie, und überhaupt eine jede Grösse, durch eine andre dividiret werde. Denn wenn man zu dreyen Linien, von denen die erste und zwote, durch die Zahlen 5, 32 und 11, 4 und die dritte durch die Einheit ausgedrückt ist, die vierte Proportionallinie finden soll, so sagt man, weil um die Zahl 2, 14, welche diese Linie ausdrücken wird, herauszubringen, bloß die Division der Zahl 11, 4 durch 5, 32 nöthig ist, die vierte Proportionallinie selbst, werde durch die Division einer Linie durch eine Linie herausgebracht.

§. 584. Es sind noch andre dergleichen Redens-Arten, zu denen die Zahlen, wodurch man ausgedehnte Grössen auszudrücken pflegt, und überhaupt der Gebrauch der Arithmetick in Geometrischen Aufgaben, Gelegenheit gegeben hat. Solte jemand Bedencken tragen dieselben zu gebrauchen, so kan er, indem er an die Stelle der Grössen, die Zahlen setzet welche sie ausdrücken, oder sich anstatt der Arithmetischen Wörter, der Redens-Arten aus den Proportions-Lehren bedienet, welche sich zu allen Arten der Grössen schicken, aller Undeutlichkeit aus dem Wege gehen.

§. 585. Es ist aber aus dieser Anwendung der gemeinen Arithmetick auf die Geometrie, eine eigene Art der Rechenkunst entstanden, welche man mit

mit Recht die allgemeine nennet. Es werden in derselben die Grössen nicht durch die gewönlichen Zifern, sondern durch andre Zeichen ausgedrückt, deren Bedeutung nicht auf die Zahlen eingeschränkt ist, sondern sich auf Linien, Oberflächen, Körper, und überhaupt auf alle Grössen, von welcher Art sie seyn mögen, erstrecket; und anstatt daß die gemeine Arithmetick ihre Aufgaben unter gewissen bestimmten Bedingungen löset, wenn sie aus einigen gegebenen Zahlen andre findet, welche von jenen abhängen; so bereichert uns diese allgemeine Rechenkunst mit neuen Lehrsätzen, und entdeckt einen Weg, die vorfallenden Aufgaben zugleich arithmetisch durch Zahlen, und geometrisch durch Beschreibung der Figuren aufzulösen. Der wichtige und weitläuftige Nutzen dieser Rechnungs-Art, macht es nothwendig die ersten Gründe derselben zu sammlen, und sie deutlicher auseinander zu setzen, obgleich die meisten schon als gemeine Begriffe vorausgesetzt, oder in dem vorhergehenden erkläret, und auch in den geführten Beweisen angewendet worden sind.

Willkürliche Sätze.

§. 586. Eine Linie, eine Oberfläche, einen Körper, eine Zahl, oder eine jede andre Grösse, welche man sich von andern unabhängig vorstellet, bezeichne man durch einen Buchstaben a, b, c ꝛc. indem man das Zeichen — vor diesen Buchstaben schreibt, wenn die Grösse negativ ist, wie dieses in der Arithmetick §. 39. u. folg. erkläret worden.

Diejenigen Buchstaben aber, welche positive Grössen bedeuten, unterscheide man mit gar keinem Zeichen, wenn sie allein vorkommen, oder im Anfange einer Reihe stehen; folgen sie aber auf andre Buchstaben, so gebe man ihnen das Zeichen $+$.

§. 587. Solche Grössen, deren Gleichheit ausser Zweifel ist, bezeichne man mit einerley Buchstaben, und wenn mehrere dergleichen zusammen kommen, drücke man die Anzahl derselben durch eine Zifer aus, welche man vor den Buchstaben schreibt. Anstatt $a+a$ schreibe man $2a$, anstatt $a+a+a$, $3a$, anstatt $2b+3b$, $5b$, und in eben diesem Verstande nehme man $13c$, $15d$. Die Einheit wird niemals geschrieben, es wäre denn daß sie allein vorkäme, oder man es zu grösserer Deutlichkeit vor nöthig erachtete. Diejenigen Grössen aber, welche von verschiedener Art sind, wie auch solche, welche zwar von einerley Art aber ungleich sind, oder deren Gleichheit nicht ausser Zweifel ist, oder sonst, aus dieser oder jener Ursache nicht als bekant angenommen werden kan, bezeichne man durch verschiedene Buchstaben.

§. 588. Hängt aber eine Grösse von andern ab, so bezeichne man auch diese Abhängigkeit durch die gehörigen Zeichen, welche größtentheils in den Anfangsgründen der Arithmetick erkläret worden sind.

§. 589. Ein Product aus zween Grössen, welche durch die Buchstaben a, b ausgedrückt werden, oder (§. 148.) die vierte Proportional-Grösse zu der Einheit zu a und zu b, bezeichne man durch ab oder ba, es wäre denn daß diese Art zu zeichnen $a \times b$ oder $a.b$ mehrere Deutlichkeit geben könte (§. 52.).

§. 590. Ein Product aus dreyen Grössen a,b,c wird am kürtzesten so ausgedrückt: abc, oder bca, oder acb, oder wie man sonst die Buchstaben versetzen mag; man kan sich aber auch folgender Bezeichnungen bedienen, $a \times bc$, oder $ab \times c$ oder $a.bc$ oder $ab.c$, oder auch $a \times b \times c$ oder $a.b.c$, wenn man dieses aus besondern Ursachen vor zuträglich erachtet. Von den Producten aus vier oder mehreren Factoren ist eben dieses zu sagen.

§. 591. Stehen aber vor denen Buchstaben welche die Grössen andeuten, auch Zahlen, so schreibe man anstatt $2a \times 3b$ dieses $6ab$, oder wenn man aus gewissen Ursachen die Factoren auseinander setzen will, so setze man sie doch vor die Buchstaben also: $2.3.ab$. Eben dieses ist zu beobachten, wenn mehrere dergleichen Zahlen vorkommen.

§. 592.

§. 592. Die Producte aus gleichen Factoren, oder die Potenzen dieses Factoren (§. 126.), bezeichne man entweder auf die eben beschriebene Art, oder indem man anstatt aa schreibet a^2, vor aaa, a^3, vor $aaaa$, a^4 u. s. f. so daß allzeit die Ziffer, welche man zur rechten Seite des Buchstabens findet, so viele Einheiten enthalte, als viele gleiche Factoren sind, aus deren Multiplication die Potenz entstanden ist. Daher heißt diese Ziffer der Exponent (Index) der Potenz, weil sie die Ordnung oder Höhe derselben anzeigt.

§. 593. Nach eben dieser Vorschrift kan man anstatt $aaabb$ schreiben $a^3 b^2$, anstatt $aaaabbbcc$ aber $a^4 b^3 c^2$, und so bey den übrigen.

§. 594. Den Quotienten, welcher herauskommt, wenn die Grösse b durch die Grösse a dividiret wird, oder die vierte Proportional-Grösse zu a, 1, und b, bezeichne man auch hier durch $\frac{b}{a}$.

§. 595. Und überhaupt bezeichne man die vierte Proportional-Grösse zu dreyen Grössen a, b, c, entweder, wenn man es für nöthig erachtet, etwas weitläuftiger $\frac{b \times c}{a}$ oder $\frac{b}{a} \times c$, oder $\frac{c}{a} \times b$, oder am kürtzesten also $\frac{bc}{a}$.

§. 596. Also wird man die vierte Proportional-Grösse zu a, b und $\frac{de}{c}$ folgendergestalt ausdrücken $\frac{bde}{ac}$; und die vierte Proportional-Grösse zu a, b, $\frac{bde}{ac}$, wird diese seyn $\frac{bbde}{aac}$, und so bey den übrigen.

§. 597. Die Quadratwurtzel einer Grösse a, oder die mittlere Proportional-Grösse zwischen der Einheit und dieser Grösse, bezeichne man durch $\sqrt{a}$. Soll man aber höhere Wurtzeln andeuten, so muß der Exponent des Grades der Wurtzel hinzugefüget werden, so daß $\sqrt[3]{a}$ die Cubic-Wurtzel, $\sqrt[4]{a}$ die vierte Wurtzel der Grösse a bedeutet, u. s. f. Wir werden uns aber mit diesen Dingen hier nicht beschäftigen.

§. 598. Wenn eine Grösse, welche aus mehreren andern zusammengesetzt ist, als eine einzige betrachtet wird, so schließe man die Buchstaben, welche sie ausdrücken, mit den ihnen vorgeschriebenen Zeichen in eine Parenthese ein, und verfahre mit demjenigen, was man auf diese Art verbunden hat, eben so als ob es ein einzelner Buchstabe

stabe wäre. So wird $a \times (b+c)$ das Product aus der Grösse a und der Summe der Grössen b und c andeuten; und $a \times (b-c)$ das Product aus a und der Differenz der Grössen b und c; ferner wird $(b+c) \times (b-c)$ das Product aus der Summe der Grössen b und c und der Differenz eben dieser Grössen bezeichnen; $(a+b)^2$ aber, das Quadrat oder die zwote Potenz der Summe der Grössen a und b, und $\sqrt{(a+b)}$ die Quadratwurtzel eben dieser Summe.

§. 599. Man gebraucht anstatt dieses Zeichens ( ) auch öfters einen Strich, den man über die Grössen ziehet, welche man als eine einzige betrachten soll. Bey denjenigen Grössen, welche in Gestalt eines Bruchs geschrieben sind, vertritt der Strich, welcher den Divisor von dem Dividendus absondert, die Stelle eines Verbindungs-Zeichens; und es bedeutet $\frac{ab+cd}{a-b}$ daß die Summe $ab+cd$ durch die Differenz $a-b$ dividiret werden soll.

Erklärung.

§. 600. Die allgemeine Addition oder die Vereinigung mehrerer durch Buchstaben ausgedrückter Grössen, geschiehet, indem man die Grössen, welche addiret werden sollen, mit ihren

Zeichen

Zeichen neben einander schreibet, wobey man zugleich meistentheils die Anzahl der Glieder welche diese Grössen ausdrücken, so viel möglich zu vermindern sucht.

Anmerckung.

§. 601. In diesem Verstande ist die Summe der Grössen a und b, diese $a+b$, hingegen die Summe der Grössen a und $-b$ ist $a-b$. Die Summe von $3a$ und $2a$ ist $3a+2a$, oder kürtzer $5a$. Die Summe von $5a$ und $-2a$ ist $5a-2a$ oder kürtzer $3a$; hingegen von $2a$ und $-5a$ ist die Summe $2a-5a$ oder kürtzer $-3a$.

§. 602. Man wird aber nach Vorschrift der folgenden Exempel eine jede Addition leicht verrichten.

Wenn man zu $ab+2bc$ addiret $ab-bc$, so wird die Summe $2ab+bc$.

Wenn man zu $ab-3bc$ addiret $cd-ab+cc$, so ist die Summe $cd-3bc+cc$.

Wenn zu $2a^2-2b^2$ addiret wird $3a^2+b^2-ca$, kömmt die Summe $5a^2-b^2-ca$.

Wenn zu $3a^3-4a^2b$ addiret wird $2a^2b-3a^3$ ist die Summe $-2a^2b$.

Wenn man zu $\frac{ab}{c}+\frac{2bb}{a}$ addiret $\frac{2ab}{c}-\frac{bb}{a}$, ist die Summe $\frac{3ab}{c}+\frac{bb}{a}$.

Wenn

Wenn man zu $\sqrt{ab} - \sqrt{bc}$ addiret $\sqrt{bc} - \sqrt{cd}$, ist die Summe $\sqrt{ab} - \sqrt{cd}$.

Endlich wenn man zu $2\sqrt{ab} - 3\sqrt{bc}$ addiret $2\sqrt{bc} - \sqrt{cd}$, so wird die Summe $2\sqrt{ab} - \sqrt{bc} - \sqrt{cd}$.

Erklärung.

§. 603. Die allgemeine Subtraction einer Grösse B von einer Grösse A, ist die Erfindung einer dritten Grösse, welche wenn sie zu B addiret wird, A wieder herausbringt.

Anmerckung.

§. 604. Diese dritte Grösse wird sehr leicht gefunden, wenn man die Zeichen, welche vor den Grössen stehen aus denen B zusammengesetzt ist verändert, + in —, und — in +, und hierauf die dergestalt veränderte Grösse B zu der Grösse A addiret. Denn wenn man zu der Grösse, welche hiedurch entstehet, hinwiederum die Grösse B selbst setzet, so muß nothwendig A herauskommen, weil diejenigen Grössen, welche man zu A addiret hat, einander aufheben.

§. 605. Wenn man auf diese Art von a die Grösse b subtrahiret, kömmt $a - b$, denn es ist $a - b + b = a$.

Subtrahiret man aber von a die Grösse $-b$, so erhält man $a + b$, weil $a + b - b = a$.

Wenn von $2aa - ab + cc$ subtrahiret wird $aa + ab - bc$, kommt $2aa - ab + cc - aa \begin{smallmatrix} -ab \\ +bc \end{smallmatrix}$

$+bc = aa - 2ab + cc + bc$. Und es wird überhaupt, wenn man nur die Zeichen umkehrt, die Subtraction eben so verrichtet wie die Addition.

Lehrsatz.

§. 606. Wenn zwo Grössen, deren eine durch die andre multipliciret werden soll, einerley Zeichen haben, so ist das Zeichen des Products $+$, sind aber die Zeichen der Factoren verschieden, so hat das Product das Zeichen $-$.

Beweis.

Es seyn die Factoren, überhaupt betrachtet, a und b, das Product aber sey, wie es gewönlich ist, durch ab angedeutet. Weil man nun die Einheit allzeit positiv annimmt, so ist nach Verschiedenheit der Zeichen, welche die Factoren a und b haben können, eine der folgenden Proportionen richtig:

$$+1 : +a = +b : +ab$$
$$+1 : +a = -b : -ab$$
$$+1 : -a = +b : -ab$$
$$+1 : -a = -b : +ab$$

welches man leicht einsieht, wenn man in diesen Proportionen nicht nur auf die Grössen überhaupt, sondern auch auf die Bedingungen derselben, welche durch die Zeichen + und — angezeigt werden, Achtung giebt.

Der 1. Zusatz.

§. 607. Alle Quadrate sind positiv, es mögen nun ihre Wurtzeln positiv oder negativ seyn; weil $-a$ durch $-a$ multipliciret, eben sowohl $+aa$ giebt, als $+a$ durch $+a$ multipliciret. Von den übrigen Potenzen einer Grösse, welche nicht durch eine einfache Multiplication einer Grösse durch sich selbst hervorgebracht werden können, sind einige positiv, einige negativ.

Der 2. Zusatz.

§. 608. Also hat auch ein jedes Quadrat zwo Wurtzeln, von denen die eine positiv, und die andre negativ ist. Die Wurtzeln sind aber übrigens einander gleich.

Lehrsatz.

§. 609. Wenn einer von zween Factoren oder alle beide, aus mehreren Gliedern bestehen, welche durch die Zeichen +, —, vereinigt sind; so ist das Factum aus allen den Producten zusammengesetzt, welche entstehen, wenn jedes einzelne Glied des einen Factoren in jedes einzelne Glied des andern multipliciret wird, und alle diese Producte mit denjenigen Zeichen vereinigt werden, welche sie bey der Multiplication der Glieder erhalten.

Beweis.

Es sey $a+b-c$ durch f zu multipliciren; so sage ich, das Product wird $af+bf-cf$ seyn. Denn da

$$\begin{aligned} 1 &: f = a : af \\ 1 &: f = b : bf \\ 1 &: f = -c : -cf, \end{aligned}$$

so ist (§. 162.) $1:f=(a+b-c):(af+bf-cf)$. Setzt man aber nunmehr, daß, indem der andre Factor bleibt, f ebenfalls aus mehreren Gliedern zusammengesetzt sey, so daß $f=g+h-k$, so ist

$$\begin{aligned} af &= a(g+h-k) = ag+ah-ak \\ +bf &= b(g+h-k) = bg+bh-bk \\ -cf &= -c(g+h-k) = -cg-ch+ck. \end{aligned}$$

Also wird das Product dergestalt zusammengesetzt wie behauptet worden ist.

Zusatz.

§. 610. Hieraus kan man folgende Vorschrift verfertigen, nach welcher eine auf die angezeigte Art zusammengesetzte Grösse durch eine andre dergleichen Grösse multipliciret wird:

$$\begin{array}{l} aa + 2ab - 3bc - cc \\ 2b - a + c \\ \hline 2aab + 4abb - 6bbc - 2bcc \\ - a^3 - 2aab + 3abc + acc \\ + a^2c + 2abc - 3bc^2 - c^3 \end{array}$$

welche Grössen, wenn man sie vereinigt, folgendergestalt geschrieben werden: $4abb - 6bbc - 5bcc - a^3 + 5abc + acc + a^2c - c^3$, indem die übrigen Glieder einander entweder aufgehoben haben, oder mehrere in eines gebracht worden sind.

Anmerckung.

§. 611. Hieraus findet man auch ein Mittel, ein gegebenes Product in zween Factoren zu theilen, welches ziemlich leicht ist, wenn einer von diesen Factoren einfach ist, oder doch nicht mehr als zwey Glieder hat. Denn wenn der am wenigsten zusammengesetzte Factor drey oder mehrere Glieder haben solte, so ist diese Arbeit nicht gering, besonders wenn viele von den Gliedern, welche durch die Multiplication entstanden waren, bey der Vereinigung einander aufgehoben haben, oder in eines zusammengeflossen sind. Es ist leicht zu sehen, daß die Factoren des Products $aa + ab$ diese sind, a und $a + b$, und es ist nicht viel schwerer bey dem Product $aa + 2ab + bb - ac - bc$ einzusehen, daß die Factoren desselben: $a + b$ und $a + b - c$ seyn müssen. Wenn man aber die Factoren des in dem vorhergehenden Zusatz zusammengesetzten Products aus demselben finden solte, so würde dieses eine mühsame Arbeit seyn.

§. 612. Ist aber ein Product, und einer der Factoren desselben gegeben, so findet man den andern Factor leichter. Denn es ist nichts weiter nöthig, als daß man den gegebenen Factor nach und

nach

nach durch diejenigen einfachen Factoren multiplicire, durch deren Multiplication das gegebene Product entstehet. Diese einfachen Factoren zusammengenommen, werden den gesuchten Factor ausmachen. Weil also

$$aa\,(2b - a + c) = 2aab - a^3 + a^2c$$
$$+ 2ab\,(2b - a + c) = 2abb - 2aab + 2abc$$
$$- 3bc\,(2b - a + c) = 6bbc + 3abc - 3bc^2$$
$$- cc\,(2b - a + c) = - 2bcc + acc - c^3,$$

und diese Producte, wenn man sie vereinigt, $4abb - 6bbc - 5bcc - a^3 + 5abc + acc + aac - c^3$ geben, welches eben das in dem Zusatze zusammengesetzte Factum ist, so hat man zu dem gegebenen Factor $2b - a + c$, den andern Factor $aa + 2ab - 3bc - cc$ gefunden.

§. 613. Man nennt dieses Verfahren, wodurch man aus einem gegebenen Product und dem einen Factor desselben, den andern Factor findet, auch hier die Division des Products durch den gegebenen Factor, und es wird dadurch, eben wie in der gemeinen Arithmetick, der Quotient bloß kürtzer und einfacher ausgedrückt. Gesetzt es sey $ab + bb$ durch b zu dividiren, so ist zwar der Quotient dieser $\frac{ab + bb}{b}$, man kan aber denselben kürtzer durch $a + b$ ausdrücken, indem man den Factor b, welcher sich im Zehler und Nenner zugleich befindet, wegläßt. Hiedurch erhält der Bruch den Nenner 1, welcher niemals geschrieben wird.

§. 614. Auf eben diese Art kan, wenn $aa - bb$ durch $a + b$ zu dividiren ist, der Quotient $\frac{aa - bb}{a + b}$ kürtzer also geschrieben werden, $a - b$. Denn es ist $aa - bb = (a + b) \times (a - b)$, welches man findet, wenn man $a + b$ durch $a - b$ multipliciret, daher ist $\frac{aa - bb}{a + b} = \frac{(a + b) \times (a - b)}{a + b}$. Wird aber hier $a + b$ sowohl in dem Nenner als in dem Zehler weggelassen, so wird eben dieser Quotient auch durch $a - b$ ausgedrückt.

Zweyter Abschnitt.

Die Ausmessung der ausgedehnten Grössen.

Aufgabe.

§. 615.

Eine ebene geradlinichte Figur zu messen.

Auflösung.

§. 616. Da das Maaß einer ebenen Figur, Fig. 153. eine jede andre ebene Figur seyn kan, so nehme man dazu ein Quadrat AB, dessen Seite AC eines von den Maaßen sey, welche gewönlich bey Messung der Linien gebraucht werden. Wenn man diese Seite AC in zehen gleiche Theile getheilet hat, und es ist AD einer von diesen Theilen, so ist AE der zehnte Theil des Quadrats AB, und das kleine Quadrat AF der zehnte Theil von AE, folglich der hundertste Theil des Quadrats AB. Theilt man nun auch die Seite AD des Quadrats AF in zehn gleiche Theile, so erhält man auf die vorige Art den zehnten und hundertsten

Theil dieses Quadrats; und es wird der zehente Theil von AF der tausendste Theil des Quadrats AB, der hundertste Theil des Quadrats AF aber, ist der zehntausendste Theil von AB. Fährt man in dieser Theilung fort, so erhält man Hunderttausendtheile und Tausendmahltausendtheile des Quadrats AB.

§. 617. Also werden in der Zahl 75,3279, wenn das Quadrat AB, welches wir zum Maaß angenommen haben die Einheit ist, die Zifern, welche vor der Stelle der einzelnen Einheiten stehen, 75 dergleichen Quadrate bedeuten; diejenige Zifer, welche unmittelbar auf diese Stelle folgt, bedeutet 3 Rechtecke wie AE oder 30 Quadrate AF; die nächste fügt noch 2 Quadrate von AF zu den vorigen, so daß überhaupt 32 Quadrate AF sind. Die folgenden Zifern aber zehlen solche Theilchen, welche von dem Quadrat AF dergestalt abgeschnitten werden, wie AE und AF von dem Quadrat AB abgesondert worden sind.

§. 618. Kan man nun ein dergleichen in kleinere Quadrate getheiltes Quadrat, unmittelbar auf die Figur legen, welche man messen soll, so wird die Verhältniß dieses Quadrats zu der Figur sehr leicht, und zum gemeinen Gebrauch meistentheils genau genung gefunden, wenn auch

die

die Figur krummlinicht ist. Es sey eine Figur F aus dem Quadrat MN zu messen. Man zehlet die quadratischen Theile von MN, welche die Figur gantz bedecket, die übrigen Theile aber setzt man zusammen biß sie gantze Quadrate ausmachen, und man sieht leicht, daß die Figur F etwas über 35 Hunderttheile des Quadrats MN enthalte. Fig: 154.

§. 619. Meistens aber erreicht man diesen Zweck viel geschwinder, wenn man die Verhältniß der Figur die man messen soll, zu dem Quadrat welches man zu einem Maaß angenommen hat, oder die Zahl, welche diese Figur aus dem Quadrat, als die Einheit betrachtet, ausdrückt, aus den durch Zahlen gegebenen Verhältnissen der Seiten der Figur schliesset, und dieses geschieht bey verschiednen Fällen so, wie es hier in der Ordnung vorgetragen wird.

§. 620. Es sey das Rechteck ABC zu messen, und a sey die Zahl, welche die Seite AB aus der Einheit ML ausdrückt, indem b die Zahl eben dieser Einheiten in BC bezeichnet; so ist die Verhältniß AC : MN $= ab : 1$ (§. 460.), und es wird das Product ab das Rechteck AC aus der quadratischen Einheit MN ausdrücken; weswegen man auch ein dergleichen Product wie ab öfters kurtz ein Rechteck nennet. Fig. 155.

§. 621. Und überhaupt wird, wenn b die Grundlinie eines Parallelogrammen, und die Höhe desselben a ist, der Inhalt des Parallelogrammen durch ab angedeutet.

§. 622. Ist hingegen in einem Dreyeck die Grundlinie b und die Höhe a, so wird das Dreyeck selbst durch $\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}a \times b = \frac{1}{2}b \times a$ ausgedrückt (§. 443.).

Fig. 156. §. 623. Wenn man ein Viereck wie ABCD durch die Diagonal-Linie AC in zwey Dreyecke theilet, und AC als die gemeinschaftliche Grundlinie beider Dreyecke, b, die Höhe hingegen des einen Dreyecks a, und des andern α nennt, so ist $ABCD = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}\alpha b = b(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\alpha) = \frac{1}{2}b(a+\alpha.)$.

Fig. 157. §. 624. Sind aber zwo gegenüberliegende Seiten AB, CD eines Vierecks ABCD parallel, und man nimmt AB, CD vor die Grundlinien der Dreyecke ABC, BCD an, in welche man das Viereck getheilet hat, so ist die Höhe dieser Dreyecke einerley; so daß wenn man diese wieder a nennt, AB aber durch β und CD durch b ausdrückt, wird $ABCD = \frac{1}{2}a(b+\beta) = a(\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\beta)$.

§. 625. Man wird also alle übrige geradlinichte Figuren durch Zahlen ausdrücken können, wenn man sie in Dreyecke oder Vierecke zerthei-

let

let, und die Zahlen, welche diese Dreyecke oder Vierecke ausdrücken, addiret.

§. 626. Ist aber der Umfang einer ordentlichen Figur p, und die Entfernung ihrer Seiten von dem Mittelpunct des Cirkels, welcher um die Figur beschrieben werden kan d, so wird der Inhalt der Figur durch die Zahl $\frac{1}{2}pd$ ausgedrückt (§. 451.).

Der 1. Zusatz.

§. 627. Drückt also die Zahl n ein Parallelogram aus, dessen Grundlinie b ist, so ist die Höhe desselben $a = \frac{n}{b}$, und wenn die Höhe a gegeben wird, so ist die Grundlinie $b = \frac{n}{a}$.

Der 2. Zusatz.

§. 628. Wird hingegen ein Dreyeck, dessen Grundlinie b und seine Höhe a ist, durch die Zahl n ausgedrückt, so ist $\frac{1}{2}a = \frac{n}{b}$ und $\frac{1}{2}b = \frac{n}{a}$.

Der 3. Zusatz.

§. 629. Und es ist allzeit, was für eine Figur auch die Zahl n ausdrücken mag, die Seite des Quadrats, welches dieser Figur gleich ist, $\sqrt{n}$.

Auf-

Aufgabe.

§. 630. Wenn zwo Seiten eines rechtwincklichten Dreyecks durch Zahlen gegeben sind, die Zahl zu finden, welche die dritte Seite ausdrücket.

Auflösung.

Fig. 158. Wird in dem rechtwincklichten Dreyeck ABC die Seite AB durch die Zahl a und CB durch b, die größte Seite AC aber durch h ausgedrückt, so ist $hh = aa + bb$, also $aa = hh - bb$ und $bb = hh - aa$; folglich $h = \sqrt{(aa + bb)}$; $a = \sqrt{(hh - bb)}$, und $b = \sqrt{(hh - aa)}$ (§. 466.).

Der 1. Zusatz.

Fig. 159. §. 631. Ist also der Halbmesser eines Cirkels, AC, und eine Sehne AB gegeben, so kan man hieraus die Sehne AD finden, welche zu der Helfte des Bogens ADB gehöret, den die Sehne AB abschneidet. Denn wenn man CD ziehet, so werden die Dreyecke AEC, AED rechtwincklicht, und wenn AC $= r$, CE aber $= c$, AE die Helfte der gegebenen Sehne $= s$, und DE $= v$: so ist $c = \sqrt{(rr - ss)}$ und man kan c finden weil r und s gegeben sind. Hiedurch aber wird auch v bekannt, welches nichts anders ist als $r - c$, und endlich AD $= \sqrt{(vv + ss.)}$.

Der

Der 2. Zusatz.

§. 632. Wenn AB eine Seite einer ordentlichen Figur ist, so wird AD die Seite einer ordentlichen Figur, welche man in eben den Cirkel beschreiben kan, und welche zweymahl so viele Winckel hat als die erste. Man kan also diese Seite durch die eben gezeigte Methode, oder etwas kürtzer finden, wenn man macht $AD = \sqrt{2rv}$. Denn es ist AD die mittlere Proportionallinie zwischen $DE = v$ und dem Durchmesser $DF = 2r$ (§. 436.).

Anmerckung.

§. 633. Wenn r überall genommen wird $= 1$ so findet man zu einer ordentlichen Figur von sechs Seiten

$s = 0,5$, und $v = 0,1339745962$

Zu einer ordentlichen Figur von XII Seiten

$s = 0,2588190451$, und $v = 0,0340741737$

Zu einer ordentlichen Figur von XXIV Seiten

$s = 0,1305261922$, und $v = 0,0085551386$

Zu einer ordentlichen Figur von XLVIII Seiten

$s = 0,0654031292$, und $v = 0,0021410768$

Zu einer ordentlichen Figur von XCVI Seiten

$s = 0,0327190828$, und $v = 0,0005354125$.

Man kan diese Arbeit so weit fortsetzen als man will.

Lehrsatz.

Lehnsatz.

Fig. 160. §. 634 Es sind in einem Rechteck ABCD, dessen Länge BC seine Breite AB weit übersteigt, aus dem Mittelpunct F, welcher die Seite BC halbiret, die Cirkelbogen GC, HB beschrieben; und nachdem die gerade Linie GI der Seite DC parallel gezogen worden, ist an das Rechteck ABCD ein rechtwincklichtes Parallelepipedum BE von willkürlicher Dicke angesetzt. Dieses Parallelepipedum werde hierauf von einer durch GI der Seitenfläche CE gleichlaufenden Ebene, und außerdem von einer durch den Bogen GC gehenden Oberfläche eines geraden Cylinders geschnitten, dessen Grundfläche in HBCG, und der Mittelpunct derselben in F falle: so wird der durch diese Cylindrische Oberfläche, abgeschnittene Körper KGCE kleiner seyn als der dritte Theil des Parallepipedi IE. Setzt man aber daß dieser Körper KGCE dem dritten Theile des Parallepipedi IE gleich sey, so wird der Fehler, welchen man hiedurch begehet, desto kleiner, je kleiner CD wird, indem alles übrige ungeändert bleibt; so daß, wenn CD verschwindet, auch dieser Fehler gänzlich verschwindet.

Beweis.

Man beschreibe in der erweiterten Ebene AE das Rechteck LM, dem Rechteck GE gleich und ähnlich,

ähnlich, und mache dasselbe zu der Grundfläche einer Pyramide LMN, deren Höhe MN sey $=$ DC. Man schneide ferner sowohl das Parallelepipedum BE, als die Pyramide LMN, durch eine den Grundflächen AE, LM gleichlaufende Ebene, in OPQ, RST; so daß VQ der Durchschnitt des Körpers KGCE, und RT der Durchschnitt der Pyramide wird. In diesem Fall ist $CD^q = DH \times DG$, und $CP^q = PX \times PV$ (§. 425.); folglich $CD^q : CP^q = DH \times DG : PX \times PV$. Da nun $DE = PQ$, und sich also $DG : PV$ wie das Rechteck GE zu dem Rechteck VQ verhält; so ist auch $CD^q : CP^q = DH \times GE : PX \times VQ$; daher weil $CD = NM$ und $CP = NT$, ferner ist, $NM^q : NT^q = DH \times GE : PX \times VQ$. Es fließt aber aus den bekannten Eigenschaften der Pyramiden, daß $NM^q : NT^q = LM : RT$, also ist auch $LM : RT = DH \times GE : PX \times VQ$

$$= GE : \frac{PX \times VQ}{DH}, \text{ und weil } LM = GE, \text{ auch}$$

$$RT = \frac{PX \times VQ}{DH},$$ das ist, wenn man den Bruch auseinander setzt, $DH : PX = VQ : RT$. Da nun DH kleiner ist als PX, so ist auch der Durchschnitt VQ kleiner als der Durchschnitt der Pyramide RT, welcher Unterschied aber desto geringer ist, je kleiner bey eben dem Durchmesser BC die

die Seite CD genommen wird; indem, wenn man diese CD sehr vermindert, zuletzt alle die Linien DH, PX, dem Durchmesser BC beinahe gleich werden. Hieraus folgt, daß auch der Körper KGCE auf eben die Art kleiner sey als die Pyramide LMN (§. 505.); und weil diese LMN der dritte Theil des Prisma IE ist (§. 548.), so ist auch der Körper KGCE kleiner als der dritte Theil des Körpers IE, doch so, daß ihr Unterschied auf die angezeigte Art beständig vermindert werden kan.

Lehrsatz.

Fig. 161. §. 635. Der Abschnitt eines Cirkels acga ist grösser als zwey Drittheile des Rechtecks abdg, dessen Grundlinie ag die Sehne des Ausschnittes ist, und dessen Höhe dem Theile ic des Halbmessers gleichet, welcher auf der Sehne senckrecht stehet. Doch wird dieser Unterschied desto geringer, je kleiner der Abschnitt in Ansehung des ganzen Cirkels ist, und wird unmercklich, wenn der Abschnitt in Vergleichung mit dem Cirkel unmercklich wird, bis er zuletzt gar verschwindet.

Beweis.

Es sey der Theil cdgi der Figur welche wir vor uns haben, mit dem Rechteck CDGI in dem nächst
Fig. 160. vorhergehenden Satz gleichen Inhalts. Weil

nun,

nun, wenn man GCD und ID zu Grundflächen annimmt, die Körper KGCE und IE von Prismatischer Art werden, und einerley Höhe DE erhalten; so verhält sich der Körper KGCE zu dem Körper IE, wie die Grundfläche GCD zu der Grundfläche ID. Es ist aber der Körper KGCE etwas kleiner als der dritte Theil des Körpers IE; also wird auch GCD etwas weniger betragen als der dritte Theil des Rechtecks ID, und daher GCI etwas grösser seyn, als zwey Drittheile dieses Rechtecks. Ist nun auch GCI der gci oder cai gleich gemacht worden, so wird zwar $gci > \frac{2}{3}\, id$; $cai > \frac{2}{3}\, bi$, und der Abschnitt $acga > \frac{2}{3}\, ad$; es können aber auch hier die Unterschiede dieser Grössen auf die angezeigte Art beständig vermindert werden.

Der 1. Zusatz.

§. 636. Dieses giebt ein Mittel an die Hand die Abschnitte zwar nicht gantz genau, aber doch ohne grossen Fehler zu messen. Wenn nehmlich der Abschnitt ein grosser Theil seines Cirkels ist, als ABCD, und man macht von demselben die kleinen Abschnitte AB, BC, CD, welche man besonders berechnet, und hierauf zu der geradlinichten Figur ABCD addiret, so kan man das Maaß des Abschnittes ABCD ohne einigen beträchtlichen Fehler schaffen. Fig. 162.

Der 2. Zusatz.

§. 637. Es sey ACB der Ausschnitt eines Cirkels, dessen Winckel gantz klein ist; AB sey die Sehne Fig. 163.

seines Bogens, und auf diese sey CE aus dem Mittelpunct senckrecht gezogen. Man nenne DB=DA, s, CD sey c und DE, v, der Halbmesser AC aber sey $= r$, so ist das Rechteck, dessen Seiten AB und DE sind $= 2sv$, folglich, wenn man einen kleinen Fehler nicht in Betrachtung ziehet, der Abschnitt AEB $= \frac{2}{3} . 2sv = \frac{4sv}{3}$. Da nun das Dreyeck ABC $= sc$, so wird der Ausschnitt $= \frac{4sv}{3} + sc = s(\frac{4}{3}v + c)$. Es ist aber $\frac{4}{3}v + c$, oder $\frac{1}{3}v + v + c = \frac{1}{3}v + r$, weil $v + c = r$, folglich ist ohne beträchtlichen Fehler der Ausschnitt $= s(\frac{1}{3}v + r)$.

Aufgabe.

§. 638. **Einen Cirkel durch das Quadrat seines Halbmessers zu messen, das heißt, die Verhältniß des Cirkels zu diesem Quadrat durch Zahlen auszudrücken, die von der Warheit nicht mercklich abweichen.**

Auflösung.

Wenn man den Cirkel in sechs und neunzig gleiche Ausschnitte theilet, deren einer ACB sey, so ist AB die Seite einer ordentlichen Figur von eben so vielen Winckeln, welche man in den Cirkel beschreiben kan; folglich wenn man $r = 1$ setzet, wird $s = 0,0327190828$ und $v = 0,0005354\text{I}$ (§. 633.)

(§. 633.), daher $\frac{1}{3} v = 0,00017847$ und $\frac{1}{3} v + r = 1,00017847$. Man wird also das Product $s(\frac{1}{3} v + r)$ welches den Ausschnitt ausdrücket, durch folgende Rechnung finden:

	0,0327190828		
	1,00017847		multipliciret,
	22	90335796	
	130	8763312	
	2617	526624	
	22903	35796	
	32719	0828	
	327190828	000	
das Product	0,0327249221	5	ist dem Ausschnitt gleich.

Nimmt man nun diese Zahl sechs und neunzig mahl, (welches am geschwindesten geschehen kan, wenn man sie durch hundert multipliciret, und von diesem Product 3,27249221 die Zahl selbst viermahl genommen, das ist 0,13089968 abzieht), so erhält man die gesuchte Zahl 3,141592, welche sich nehmlich zu 1 verhält wie der Cirkel zu dem Quadrat des Halbmessers. Diese Verhältniß wird desto genauer richtig seyn, in je mehrere Ausschnitte man den Cirkel theilet, und desto mehr fehlen, je kleiner die Anzahl dieser Ausschnitte genommen wird.

Der 1. Zusatz.

§. 639. Weil das Quadrat des Durchmessers viermahl so groß ist als das Quadrat des Halbmessers, so verhält sich der Cirkel zu dem Quadrat des Durchmessers, wie 3, 141592 : 4, oder wie 0, 785398 : 1.

Der 2. Zusatz.

§. 640. Und weil der Cirkel einem Rechteck gleich ist, welches den halben Umkreis des Cirkels zu seiner Grundlinie, und den Halbmesser zu seiner Höhe hat (§. 453.); so verhält sich der Cirkel zu dem Quadrat seines Halbmessers, wie der halbe Umkreis zu dem Halbmesser (§. 457.), oder wie der gantze Umkreis zu dem Durchmesser. Also wird auch die gefundene Verhältniß 3, 141592 : 1 oder genauer 3, 14159265358979323846 : 1 der Verhältniß des Umkreises zu dem Durchmesser so nahe kommen, daß der Fehler gantz unmercklich ist.

Aufgabe.

§. 641. Die Maaße derjenigen Grössen zu bestimmen, welche bey den Cirkeln, bey den Oberflächen der geraden Cylinder und Kegel, wie auch bey den Oberflächen der Kugeln, von der Verhältniß des Durchmessers eines Cirkels zu seinem Umkreise abhängen.

Auflö-

Auflösung.

§. 642. Es werde die Verhältniß des Durchmessers eines Cirkels zu dem Umkreise welche wir eingerückt haben, oder eine andre, welche der Warheit sehr nahe kommt, durch $\delta : \pi$ ausgedrückt, und der gegebene Durchmesser eines Cirkels sey d, so ist der Umkreis dieses Cirkels $= \frac{\pi}{\delta}. d.$ (§. 419.).

§. 643. Man kan also auch einen jeden Theil des Umkreises durch Zahlen ausdrücken, wenn seine Verhältniß zu dem gantzen Umkreise gegeben ist. Es sey diese Verhältniß eines Bogens zu dem Cirkelkreise $1 : n$, indem n eine gantze oder eine gebrochene Zahl bedeutet; so ist der Bogen $= \frac{\pi}{n\delta}. d.$

§. 644. Ist aber der Umkreis eines Cirkels durch $= p$ ausgedrückt, so ist der Durchmesser eben dieses Cirkels $= \frac{\delta}{\pi}. p.$

§. 645. Der Cirkel selbst wird aus einem gegebenen Durchmesser durch folgende Formel herausgebracht $\frac{\pi}{\delta}. d \times \frac{1}{4} d = \frac{\pi dd}{4\delta}$ (§. 453.), welche Formel verschiedne Arten an die Hand giebt, den Cirkel aus seinem Durchmesser zu berechnen.

§. 646. Ist der Umkreis eines Cirkels gegeben, so findet man den Cirkel selbst, wenn man diesen Umkreis p durch den vierten Theil des zu demselben gefundenen Durchmessers $\frac{\delta}{\pi}.p$ multipliciret. Das Product $\frac{\delta}{4\pi}.pp$ giebt den Cirkel an.

§. 647. Ein Ausschnitt dessen Bogen sich zu dem gantzen Umkreise wie 1 : n verhält, und dessen Halbmesser $r = \frac{1}{2}d$ gegeben ist, wird seyn $\frac{\pi}{n\delta}.\frac{1}{4}dd = \frac{\pi}{n\delta}.rr$; weil $\frac{1}{4}dd = rr$.

§. 648. Wird der Inhalt des Cirkels durch die Zahl e gegeben, so ist $\frac{\pi}{4\delta}.dd = e$ (§.645.), folglich $dd = \frac{4\delta e}{\pi}$, und man findet d, wenn man aus $\frac{4\delta e}{\pi}$ die Quadratwurtzel zieht; oder es ist $d = 2\sqrt{\frac{\delta e}{\pi}}$.

§. 649. Wenn d der Durchmesser der Grundfläche eines geraden Cylinders, und a dessen Höhe ist: so findet man die Oberfläche des Cylinders $= \frac{\pi}{\delta}. da$ (§. 561.).

§. 650. Wird aber der Umkreis der Grundfläche unmittelbar durch p gegeben, so ist die Oberfläche des Cylinders $= pa$.

§. 651. Wenn d der Durchmesser der Grundfläche eines geraden Kegels und l die Seite desselben ist, so ist die Oberfläche des Kegels $= \frac{\pi}{2\delta}. dl$ (§. 563.).

§. 652. Ist aber auch hier der Umkreis der Grundfläche unmittelbar durch p gegeben, so ist die Oberfläche des Kegels $= \frac{1}{2} pl$.

§. 653. Und überhaupt, wenn man die Seite l eines Kegels, er mag gantz oder abgekürtzet seyn, in zwey gleiche Theile theilet, und sich durch den Theilungs-Punct auf der Oberfläche des Kegels den Umkreis eines Cirkels vorstellet, dessen Ebene der Grundfläche des Kegels parallel sey, man nennt aber den Durchmesser dieses Cirkelkreises d, so ist die Oberfläche des Kegels $= \frac{\pi}{\delta}. dl$ (§. 565.).

§. 654. Hieraus sind die Theile der Kegel-Oberflächen, welche zwischen zwoen Seiten eines Kegels liegen, wie auch die Theile der cylindrischen Oberflächen, welche zwischen zwoen in der Oberfläche des Cylinders der Axe desselben parallel gezogenen geraden Linien enthalten sind, leicht zu berechnen, wenn die Verhältniß der Bogen, welche diese Theile der Oberflächen begrentzen, zu dem gantzen Umkreise bekannt ist.

§. 655. Wenn der Durchmesser einer Kugel durch d ausgedrückt wird, so ist die Oberfläche derselben $\frac{\pi}{\delta} \cdot dd$ (§. 570.).

§. 656. Und wenn man von einer Kugel einen Abschnitt wegnimmt, dessen Höhe a ist, indem d auch hier den Durchmesser der Kugel andeutet, so ist die krumme Oberfläche dieses Abschnittes $= \frac{\pi}{\delta} \cdot da$ (§. 568.).

§. 657. Hieraus sind die Theile solcher Oberflächen, deren Verhältniß zu den gantzen Oberflächen gegeben wird, leicht zu berechnen.

Aufgabe.

§. 658. Einen jeden Körper, von denen in der Geometrie betrachteten Gattungen, zu messen.

Auflö-

Auflösung.

§. 659. Da das Maaß eines Körpers ein jeder andrer Körper seyn kan, und man den Körper mit diesem Maaß gemessen hat, so bald man auf diese oder jene Art die Verhältniß des Körpers zu dem Maaß herausbringt: so nehme man einen Würfel ED, dessen Seite AB = AC = AD eines von den Linien-Maaßen sey, deren man sich durchgängig bedienet. Wird nun die Seite AB in zehen gleiche Theile getheilet, deren erster AF ist, und durch F eine Ebene, der Ebene CD parallel gelegt, so wird von dem Würfel das Stück CFD, der zehnte Theil desselben abgeschnitten. Wenn aber die Seite AC in zehn gleiche Theile getheilet wird, von denen der erste AG ist, und man schneidet den Körper CFD durch den Punct G mit einer Ebene, die der Ebene DB parallel läuft, so wird ein Prisma GFD abgeschnitten, welches der zehnte Theil des Körpers CFD, aber der hundertste Theil des gantzen Würfels ist. Wenn man endlich auch die Seite AD in zehen gleiche Theile theilet, deren erster AH ist, und durch den Punct H eine Ebene der CB parallel leget, so schneidet man dadurch den kleinen Würfel GFH ab, welcher der zehnte Theil des Prisma GFD, der hundertste Theil des Körpers CFD, und der tausendste Theil des Würfels ED seyn wird. Man Fig. 164.

kan also, wenn man den Würfel GFH, auf die nehmliche Art theilet; den zehnten, hundertsten und tausendsten Theil desselben herausbringen, deren erster ein Zehentausendtheil des Würfels ED, der andre, ein Hunderttausendtheil, und der dritte ein Tausendmahltausendtheil eben dieses Würfels ED seyn wird. Bey dem letzten von diesen Theilen, kan diese Theilung wiederholet, und ohne Ende fortgesetzt werden.

§. 660. Wenn daher in irgend einer Zahl, welche aus gantzen Einheiten und zehntheiligen Brüchen bestehet, als zum Beyspiel in dieser 57, 5324 die Zifern, welche zur Lincken der Stelle der einzelnen Einheiten stehen, solche Würfel wie ED zehlen, die man vor die Einheit angenommen hat; so ist es sehr leicht einzusehen, was vor Theile dieses Würfels die übrigen Zifern, welche zur rechten der Stelle der einzelnen Einheiten stehen, ausdrücken werden. Nimmt man die drey Zifern 532 welche unmittelbar auf die Stelle der einzelnen Einheiten folgen, so bedeuten dieselben 5 solche Körper als CFD, 3 Prismata wie GFD, und 2 Würfel GFH, oder wie es gewönlicher ist zu zehlen, 532 Würfel GHF, weil dieser der tausendste Theil der Einheit ist. Auf eben diese Art können die drey Zifern, welche auf diese folgen, nehmlich

400,

400 (indem man die ledigen Stellen mit Nullen füllet), solche Würfel zehlen, deren jeder ein Tausendtheil des Würfels GFH ist; und so weiter.

§. 661. Hat man nach Anleitung des vorhergehenden ein hohles Cubisches Maaß verfertiget, so kan man einen jeden Körper, was für eine Figur er auch haben mag, folgendergestalt messen. Man legt den Körper in ein Gefäß, und gießt soviel Wasser oder andre flüßige Materie darauf, daß der Körper gantz bedeckt wird. Man bemerckt genau wie hoch das Wasser in dem Gefäße stehet; und nimmt hierauf den Körper heraus, ohne etwas von den Wasser mitzunehmen; man gießet vielmehr so vieles Wasser, welches man aber vorher in dem hohlen Maaß gemessen hat, hinzu, als erfordert wird um das Wasser in dem Gefäß eben so hoch steigend zu machen, als es vorher gestiegen war, da man den Körper darein versenckt hatte. Die Ausdehnung des Körpers wird der Ausdehnung des Wassers gleich seyn, welches man zu dem übrigen an die Stelle des Körpers hat gießen müssen, und das Maaß dieses Wassers ist bekannt.

§. 662. Ueberhaupt aber ist es viel bequemer, so oft dieses angeht, aus den Maaßen einiger Linien bey den Körpern, die Maaße der Oberflächen derselben, und aus diesen und den vorigen zusammengenommen, ferner die Maaße der Körper selbst zu finden; und dieses geschiehet auf folgende Art.

§. 663. Es sey ein Prisma zu messen, dessen Grundfläche, aus dem Quadrat eines Linien-Maaßes durch die Zahl b, seine Höhe aber aus dem Linien-Maaße selbst durch die Zahl a ausgedrückt sey. So verhält sich $b : 1$ wie die Grundfläche des Prisma, zu der Grundfläche des Würfels, welcher zum Maaß genommen worden ist, und $a : 1$ wie die Höhe des Prisma, zu der Höhe des Würfels, folglich (§. 526.) verhält sich $ab : 1$ wie das Prisma zu dem Würfel; und man kan ein jedes Prisma durch die Zahl ab ausdrücken.

§. 664. Die Grundfläche aber wird aus den Maaßen der Linien auf verschiedne Arten gefunden, welche §. 615 und folg. wie auch §. 641 und folg. gezeigt worden sind. Ist die Grundfläche ein Cirkel und sein Durchmesser d, der Körper aber ein Cylinder, so ist $b = \frac{\pi}{4\delta} . dd$, folglich wird, wenn auch hier a die Höhe bedeutet, der Cylinder durch die Zahl $\frac{\pi}{4\delta} . dda$ ausgedrückt.

§. 665.

§. 665. Ist die Grundfläche einer Pyramide b und die Höhe derselben a, so wird die Pyramide durch die Zahl $\frac{1}{3}ab$ gegeben (§. 548.).

§. 666. Wenn die Höhe eines Kegels a ist, und der Durchmesser seiner Grundfläche d, so ist die Grundfläche $= \frac{\pi}{4\delta} . dd$; folglich drückt die Zahl $\frac{\pi}{4\delta} . dd . \frac{1}{3}a$ oder $\frac{\pi add}{12\delta}$ den Kegel aus.

§. 667. Ist die Höhe des Kegels dem Durchmesser seiner Grundfläche gleich, das ist, $a = d$, so ist der Kegel $= \frac{\pi}{12\delta} . ddd$. Da aber eine Kugel von eben diesem Durchmesser zweymahl so groß ist als ein solcher Kegel (§. 557.), so ist die Kugel $= \frac{\pi}{6\delta} . ddd$.

§. 668. Die Halbkugel aber, welche eben diesen Durchmesser hat, wird durch eben die Zahl $\frac{\pi}{12\delta} . ddd$ ausgedrückt, durch welche der Kegel ausgedrückt wurde, der ihr gleich ist.

§. 669. Man erhält das Maaß eines Ausschnittes von einem Cylinder, von einem Kegel, von einer Halbkugel, oder von einer Kugel, wenn die Verhältniß desselben zu dem Körper von dem er ein Theil ist, $1 : n$, gegeben wird, und man die Zahl, welche den gantzen Körper ausdrückt durch n dividiret.

Der 1. Zusatz.

§. 670. Hieraus findet man auch die Seite eines Würfels, welcher einem gegebenen Körper c, oder mehreren Körpern, die zusammengenommen den c ausmachen, gleich ist. Es sey die gesuchte Seite des Würfels a, so ist $aaa = c$, folglich $a = \sqrt[3]{c}$.

Der 2. Zusatz.

§. 671. Eine Kugel, die einem Körper c, oder verschiednen Körpern, welche zusammen c ausmachen, gleich ist, wird gefunden, wenn man setzet, daß der Durchmesser dieser Kugel d sey. Alsdenn ist die Kugel $= \frac{\pi}{6\delta}. ddd$, folglich $\frac{\pi}{6\delta}. ddd = c$, und $ddd = \frac{6\delta c}{\pi}$, und $d = \sqrt[3]{\frac{6\delta c}{\pi}}$. Auf eben diese Art kan man andre dergleichen Fragen, welche bey den Cylindern und Kegeln vorfallen können, beantworten.

Der

Der 3. Zusatz.

§. 672. Wenn die Grundfläche eines Prisma, welches einem Körper c gleichet, b ist, so ist die Höhe des Prisma $a = \frac{c}{b}$; und wenn die Höhe a eines Prisma, welches dem Körper c gleichet, gegeben wird, so ist die Grundfläche desselben $b = \frac{c}{a}$.

Der 4. Zusatz.

§. 673. Ist ein Cylinder, welcher die Höhe a hat, einem Körper c gleich, so ist $\frac{\pi}{4\delta} . dda = c$, folglich $dd = \frac{4\delta c}{\pi a}$, und $d = \sqrt{\frac{4\delta c}{\pi a}}$. Bey dem Kegel kan eine ähnliche Frage auf eben die Art beantwortet werden, und man erhält alsdenn $d = \sqrt{\frac{12\delta c}{\pi a}}$.

Aufgabe.

§. 674. Einen Winckel zu messen.

Auflösung.

Da das Maaß der Winckel ein rechter Winckel ist, so kan, wenn man diesen in eine Anzahl von gleichen Theilen theilet, ein jeder Winckel durch

durch einen rechten Winckel, oder durch die Theile desselben, gemessen werden. Es wird aber ein Winckel getheilt, wenn man seinen Bogen theilet, welcher aus der Spitze des Winckels zwischen seinen Schenckeln mit einem willkürlichen Halbmesser beschrieben ist (§. 352.).

Man hat durchgehends die Theilung des rechten Winckels oder des Quadranten in 90 gleiche Theile angenommen, deren 180 also den halben Umkreis, oder zween rechte Winckel, und 360 den gantzen Umkreis ausmachen. Ein solcher Theil des Umkreises heißt ein **Grad**. Diesen pflegt man weiter in 60 *Minuten*, eine jede Minute in 60 Secunden, die Secunde in 60 Terzen, und so fort zu theilen. Ist die Zahl der Grade, Minuten und Secunden ꝛc. gegeben, welche der Bogen eines Winckels enthält, so ist die Verhältniß dieses Winckels zu einem rechten Winckel, wie auch zu zween und vier rechten Winckeln, folglich der Winckel selbst bekannt.

Anmerckung.

§. 675. Es erfordert also die Ausmessung eines Winckels, daß man seinen Bogen in seine Grade, Minuten ꝛc. theile; und wenn man aus dem gegebenen Maaß eines Winckels den Winckel selbst darstellen soll, ist eben diese Theilung des Bogens nöthig. Man kan aber diese Arbeit ersparen, wenn man

man einen auf einer dazu geschickten Materie gezeichneten Cirkelkreis oder Theil desselben zur Hand hat, welcher in seine Grade, Minuten rc. getheilet ist, so daß zugleich der Mittelpunct, aus welchem der Umkreis beschrieben worden, auf eben dem Instrument bezeichnet oder sonst bekannt ist. Denn wenn man diesen Mittelpunct auf die Spitze des Winckels dergestalt setzet, daß der getheilte Bogen zwischen den Schenckeln des Winckels liegt, so erscheinen die Theile des Bogens, welche den Winckel messen. Damit man aber die Zahlen nicht verwirren möge, welche die Grade, Minuten und Secunden rc. anzeigen, so pflegt man sie also zu schreiben, $57^{\circ}, 05', 21'', 34'''$, indem o die Grade, ′ die Minuten, ″ die Secunden bedeutet, und so ferner.

§. 676. Ist das Maaß eines Winckels gegeben, so weis man zugleich das Maaß desjenigen Winckels, um welchen der erstere kleiner oder grösser ist als ein rechter Winckel. Denn wenn man das gegebene Maaß des Winckels von 90 Graden abzieht, oder man zieht 90° von diesem Maaße ab, nachdem der Winckel spitzig oder stumpf ist, so bleibt diese Differenz übrig, welche man auch die Ergänzung des Winckels zu einem rechten Winckel oder zu 90 Graden (Complementum) zu nennen pflegt.

§. 677. Auf eben die Art findet man den Unterschied eines Winckels von zween rechten Winckeln, wenn man anstatt 90 Graden 180 nimmt. Diese Differenz nennt man auch die Ergänzung eines Winckels zu zween rechten Winckeln, oder zu 180 Graden (Supplementum).

Dritter Abschnitt.

Die ebene Trigonometrie.

Erklärung.

§. 678.

Fig 165. Wenn man in dem Umkreise eines Cirkels dessen Durchmesser BA ist, einen Bogen nach Willkühr nimmt, welcher sich in dem Punct A anfängt und in D endiget, und man läßt von diesem Endigungs-Punct auf den Durchmesser BA die gerade Linie DE senckrecht herabfallen, so heißt diese DE der Sinus eines solchen Bogens, und des Winckels, welcher von diesem Bogen gemessen wird.

Anmerckung.

§. 679. Man kan sich bey jedem Umkreise eines Cirkels einen Anfang A vorstellen, und setzen daß der Umkreis beschrieben worden sey, indem sich ein Punct aus A durch D nach B und so weiter herum bis wieder in A bewegt hat. Da man aber die Bewegung eines solchen Punctes in eben diesem Kreise auch weiter fortsetzen, und dadurch die Bogen

gen ADBAD, ADBADBAD, und unendlich viele andre herausbringen kan, welche alle sich in A anfangen, und in D endigen, so wird auch der Sinus DE zu allen solchen Bogen, und nicht zu dem Bogen AD allein gehören, welcher unter allen der kleinste ist. Wird also der Bogen AD durch a und ein gantzer Umkreis des Cirkels durch p asgedrückt, so ist DE der Sinus aller dieser Bogen a, $p + a$, $2p + a$, $3p + a$, $4p + a$ und so weiter ohne Ende. Ob wir uns gleich hier mit solchen Bogen die grösser sind als ein halber Umkreis nicht beschäftigen werden, so ist es doch gut, den Begrif des Sinus gleich anfangs allgemein zu machen.

§. 680. Zieht man aber FG durch den Mittelpunct C auf den Durchmesser AB senckrecht, so wird dadurch der gantze Umkreis in vier Quadranten getheilet; und es muß der Endpunct D des nach Willkühr angenommenen Bogens AD, nothwendig innerhalb eines von diesen Quadranten fallen, wenn er nicht in einen von den Puncten A, F, B, G selbst fällt. Fällt D in A, oder in den Anfang des Umkreises, so ist der Bogen sowohl als sein Sinus ein Punct, und hat keine Grösse. Entfernt sich aber D von A gegen F, und fängt also der Bogen an zu wachsen, so wächst auch der Sinus, und zugleich der Winckel, welcher von dem Bogen gemessen wird, und es ist daher der Sinus eines sehr kleinen Winckels auch selbst sehr klein, und von dem Maaße des Winckels kaum zu unterscheiden. Entfernt sich nun D nach eben der Seite immer weiter von A, so wächst auch der Sinus beständig, bis endlich D in F fällt, wodurch der Bogen ein Quadrante, der Winckel welchen er mißt, ein rechter Winckel, und der Sinus von beiden, dem Halbmesser FC gleich wird. Geht der Punct D von hier noch weiter fort, und fällt in dem Quadranten FB, so wird zwar dadurch der Bogen und der von demselben gemessene Winckel noch immer grösser, hingegen der Sinus, oder die aus dem Endpunct des Bogens auf den Durchmesser herabfallende senckrechte Linie wieder kleiner, und nimmt beständig ab, so wie sich D dem Punct B nähert, bis zuletzt wenn D in B fällt, und dadurch der Bogen dem halben Umkreise und sein Winckel zween rechten Winckeln gleich wird, der Sinus gäntzlich verschwindet.

§. 681. Weil alle diese bisher betrachteten Sinus, welche zu Bogen gehören die nicht mehr als 180° enthalten, und zu Winckeln, welche nicht grösser sind als 2R, auf einerley Seite des Durchmessers AB fallen, nehmlich in unsrer Zeichnung über denselben, so kan man sie sämtlich als positiv ansehen.

§. 682. Ein jeder positiver Sinus, gehört außer unendlich vielen andern, vornehmlich zu zween Bogen AD und AFH. Denn man kan in dem Quadranten FB allzeit einen Punct H dergestalt nehmen, das die aus demselben auf den Durchmesser AB herabfallende senckrechte Linie, der DE gleich werde, und man findet diesen Punct, wenn man HB dem Bogen AD, oder FH dem Bogen DF gleich macht. Es haben also solche Bogen gleiche Sinus, deren einer den Quadranten um so viel übertrift, als dem andern zu einem Quadranten fehlet, und die folglich zusammengenommen einen Bogen von 180° ausmachen; und diejenigen Winckel haben gleiche Sinus, deren einer die Ergäntzung des andern zu zween rechten Winckeln ist.

§. 683. Entfernt sich aber der Endpunct des Bogens wieder von B, und geht nunmehr in dem dritten Quadranten nach G weiter fort, so wachsen hier die Sinus in eben der Ordnung wie in dem ersten Quadranten, so daß wenn der Endpunct in G fällt, der Sinus des Bogens AFBG wieder dem Halbmesser gleich wird; und in dem vierten Quadranten nehmen die Sinus in eben der Ordnung ab, als in dem zweyten, wodurch wenn der Endpunct des Bogens endlich in A zurück kommt, der Sinus gäntzlich verschwindet. Es müssen aber alle Sinus, welche in den dritten und vierten Quadranten, oder in unsrer Zeichnung unter den Durchmesser AB fallen, negativ angenommen werden, da man die übrigen als positiv betrachtet hat, und es erstreckt sich alles was bisher gesagt worden ist, auch auf die Bogen, welche grösser sind als ein gantzer Umkreis, welches man anmercken kan, obgleich die Betrachtung solcher Bogen in den Anfangsgründen keinen Platz findet.

Zusatz.

§. 684. Es hat also der Sinus des halben und des gantzen Umkreises gar keine Grösse, der Sinus von 90 Graden hingegen oder der Sinus eines rechten Winckels ist dem Halbmesser gleich, und wenn man diesen $+ r$ nennet, so ist der Sinus von $270^\circ = - r$. Ist aber der Bogen AD von 50 Graden, so gehört sein Sinus zugleich zu einem Bogen von 130 Graden, welcher die Ergäntzung des ersten zu 180° ist.

Erklärung.

§. 685. Der Cosinus eines Bogens, welcher sich in A anfängt und in D endiget, wie auch des Winckels, der von diesem Bogen gemessen wird, ist der Theil CE des Durchmessers AB, welcher zwischen dem Mittelpunct C und dem Sinus DE enthalten ist. Der übrige Theil EA des Durchmessers AB, in eben dem Quadranten, von dem Sinus bis an den Umkreis, oder die Differenz des Cosinus und des Halbmessers, heißt der Quer-Sinus (Sinus versus) eben dieses Bogens, oder eben dieses Winckels.

Anmerckung.

§. 686. Der Cosinus eines Bogens AD gehört eben sowohl wie der Sinus, zu allen den unendlich vielen Bogen, die sich in A anfangen und in D endigen, und von denen AD der kleinste ist. Es ist aber der Cosinus eines Bogens AD zugleich der Sinus des Bogens DF, der zwischen dem Endpunct D und dem Durchmesser FG liegt, welches

man

man leicht sieht, wenn man aus D auf den Durchmesser FG die Linie De senckrecht ziehet; und dieser Bogen ist, so lange AD nicht grösser wird als 180°, die Ergäntzung des Bogens AD zu einem Quadranten, das ist, was man dem Bogen AD zusetzen oder abnehmen muß, damit er ein Quadrant werde. Es heißt daher der Cosinus eines Bogens auch der Sinus der Ergäntzung desselben zu 90° (Sinus Complementi), und alles was hier von den Bogen gesagt wird, gilt zugleich von den Winckeln, welche durch diese Bogen gemessen werden.

§. 687. Wenn man sich auch hier vorstellet, daß der Umkreis des Cirkels durch die Bewegung eines Puncts von A nach D, F und so weiter beschrieben wird, so ist, so lange dieser Punct sich nicht von A entfernet, der Cosinus dem Halbmesser gleich. Fängt der Bogen an zu wachsen, so wird sein Cosinus kleiner und unterscheidet sich immer mehr von dem Halbmesser, je näher der Bogen einem Quadranten kommt, biß er endlich wenn D in F fällt, und der Winckel, welchen der Bogen mißt ein rechter Winckel wird, gantz verschwindet. Wächst aber der Bogen noch über diese Grentze, indem sein Endpunct in den zweyten Quadranten übergeht, so fängt auch der Cosinus auf dem Halbmesser CB, welcher auf der andern Seite des Durchmessers FG liegt, an zu wachsen, und wird wieder dem Halbmesser gleich, wenn der Bogen oder sein Winckel 180° enthält. Sind also die Cosinus der Bogen in dem ersten Quadranten, und der von denselben gemessenen spitzigen Winckel vor positiv angenommen und mit + bezeichnet worden, so muß man die Cosinus der Bogen welche über 90° halten, und stumpfe Winckel messen, als negativ betrachten, und denselben das Zeichen — geben; wodurch also die spitzigen Winckel von den stumpfen in allen Fällen zu unterscheiden sind. Man sieht leicht, daß die Bogen und die Winckel, welche einerley Sinus haben, das ist, welche um einerley Zahl von Graden von dem Quadranten abweichen (§. 682), auch gleiche Cosinus haben müssen; doch bleiben auch diese in Absicht der Zeichen unterschieden, so daß wenn man den Cosinus des Bogens AD mit $+c$ bezeichnet, der Cosinus von ADH durch $-c$ ausgedrückt werden muß.

§. 688. Wird ein Bogen grösser als 180°, und geht folglich sein Endpunct in den dritten Quadranten nach G über, so nimmt der Cosinus in eben der Ordnung ab wie in dem ersten Quadranten, bleibt aber hier beständig negativ, bis er, wenn der Endpunct des Bogens in G kommt, wieder gäntzlich verschwindet. In dem vierten Quadranten hingegen fangen die positiven Cosinus wieder an zu wachsen, und wenn der Endpunct des Bogens in A zurückkommt, folglich der gantze Umkreis vollendet ist, wird der Cosinus dem Halbmesser abermals gleich; und dieses dauret so beständig, indem alle Cosinus in dem ersten und vierten Quadranten positiv, in dem zweyten und dritten hingegen negativ werden. Mit dem Quer-Sinus werden wir uns hier nicht beschäftigen.

Erklä-

Erklärung.

§. 689. Wenn eine unendliche gerade Linie den Umkreis eines Cirkels, dessen Durchmesser AB ist in A berühret, und man nimmt diesen Punct A vor den Anfang eines Bogens an, welcher sich in D endiget, worauf man durch den Mittelpunct des Cirkels und durch diesen Punct D die gerade Linie CD ziehet, und verlängert, biß sie die unendliche Berührungslinie auf einer oder der andern Seite antrift, wie hier in E geschiehet, so heißt das abgeschnittene Stück AE die Tangente eines jeden Bogens, welcher sich in A anfängt und in D endiget, und eines jeden Winckels, welcher von einem dieser Bogen gemessen wird; CE aber, heißt die Secante eben dieses Bogens, und eben dieses Winckels. Fig. 166.

Anmerckung.

§. 690. Die Tangente AE gehört außer dem Bogen AD, und dem Winckel DCA, zu unendlich vielen Bogen und Winckeln, von denen die jetzt benannten die kleinsten sind. Wir werden aber auch hier von solchen Bogen, welche den halben Umkreis übertreffen, keinen Gebrauch machen.

§. 691. So lange sich D von A nicht entfernt, ist die Tangente = o. Ist der Bogen AD sehr klein, so ist auch die Tangente sehr klein, und fällt mit dem Bogen beinahe zusammen. Wächst der Bogen und zugleich der Winckel DCA, so wächst auch die Tangente, und wird dem Halbmesser gleich, wenn AD 45° Grade enthält, oder der Winckel DCA $= \frac{1}{2}$R. Geht der Endpunct D von hier noch weiter fort, so wird die Tangente grösser als der Halbmesser, und fängt wenn sich D dem Punct F des auf AB senckrecht gezogenen Durchmessers FG nähert, sehr starck an zu wachsen, so daß sie nach und nach eine jede Grösse erreichet, welche man angeben kan. Wird endlich der Bogen AD ein Quadrant, indem D in F fällt, so ist die Grösse der Tangente gar nicht mehr zu bestimmen, indem die verlängerte Secante dieselbe nirgends schneiden kan, weil beide auf dem Durchmesser AB senckrecht stehen. Dieses will man dadurch ausdrücken, wenn man sagt, daß die Tangente von 90° oder von einem rechten Winckel unendlich groß sey; weil nehmlich der Punct E, welcher die Tangente endigen solte, eigentlich nirgends anzutreffen ist, und man vor die Tangente keine Grösse bestimmen kan, welche nicht zu klein wäre.

§. 692. Die bisher betrachteten Tangenten fallen alle über den Durchmesser AB, und müssen nach den einmahl angenommenen Begriffen als positiv angesehen werden. Geht aber nunmehr der Punct in dem Umkreise des Cirkels weiter fort, und fällt in dem zweyten Quadranten FB zum Beyspiel in H, so wird die verlängerte CH die unendliche Berührungslinie niemals über dem Durchmesser AB erreichen, wohl aber unter demselben in L. Es werden

den also die Tangenten der Bogen, welche über 90° enthalten, und der Winckel welche grösser sind als ein rechter Winckel, wieder von einer endlichen und bestimmten Grösse, und sind anfangs sehr groß, so lange sich der Endpunct des Bogens von F wenig entfernet, werden aber nach und nach kleiner, so wie der Bogen dem halben Umkreise näher kommt, und verschwinden gäntzlich, wenn der Endpunct des Bogens in B fällt, und der Winckel zween rechten Winckeln gleich wird. Es müssen aber alle diese Tangenten, da sie unter den Durchmesser AB fallen, als negativ betrachtet werden.

§. 693. Ist FH = FD, das ist, nimmt man zween Bogen, deren einer den Quadranten um so viel übertrift, als dem andern an einem Quadranten fehlet, oder zween Winckel, welche von solchen Bogen gemessen werden, so wird auch BH = AD, und folglich AK = AD. Der Winckel DCA wird also auch = ACK und daher AE = AL. Es sind also die Tangenten der zween Bogen AD und ADH welche zusammen 180° enthalten, oder der Winckel ACD und ACH welche zusammen 2R ausmachen, gleich, und nur dadurch von einander unterschieden, daß die eine als positiv, die andre hingegen als negativ betrachtet werden muß, welches also auch hier ein Kennzeichen der stumpfen und spitzigen Winckel abgeben kan.

§. 694. Will man auch die Bogen und Winckel von mehr als 180° betrachten, so findet man, daß die Tangenten derselben, so lange sie kleiner sind als 3 Quadranten, in eben der Ordnung, und auf eben der Seite des Durchmessers AB wachsen wie in dem ersten Quadranten, so daß die Tangente des Bogens ABI, wenn BI = AD, mit der Tangente des Bogens AD vollkommen einerley ist: fällt aber der Endpunct des Bogens in G, so wird die Tangente wieder unendlich groß. In dem vierten Quadranten nehmen die Tangenten in eben der Ordnung und auf eben der Seite des Durchmessers AB ab, als in dem zweyten geschehen ist, und dieses Abwechseln dauert beständig fort.

§. 695. Was von den Secanten zu sagen ist, kan hieraus leicht geschlossen werden. Sie wachsen mit der Tangente zugleich, und nehmen mit derselben zugleich ab. Wird die Tangente unendlich, so wird auch die Secante unendlich; und wenn die Tangente verschwindet, so wird die Secante dem Halbmesser gleich, und kan niemals kleiner seyn als derselbe.

Erklärung.

§. 696. Wenn die unbegränzte gerade Linie NM, den Cirkel in dem Punct F berühret, folglich auf die Tangente AE senckrecht fällt, so heißt derjenige Theil derselben FM, welcher zwischen dem Durchmesser FG, und der, wenn es nöthig ist, verlängerten Secante CD liegt, die Cotangente des Bogens AD oder des Winckels ACD, und eines jeden andern Winckels, welcher durch

einen

einen Bogen gemessen wird, der sich in A anfängt und in D endiget; CM aber heißt die Cosecante eben dieser Bogen und eben dieser Winckel.

Anmerckung.

§. 697. Man sieht leicht, wenn man die Zeichnung betrachtet, daß die Cotangente FM zugleich die Tangente des Bogens FD sey. Da nun dieser Bogen FD mit dem Bogen AD zusammen einen Quadranten ausmacht, so nennt man die Cotangente eines Bogens oder eines Winckels auch die Tangente der Ergänzung desselben zu 90 Graden (Tangens Complementi), und es können zum Beyspiel die Tangente von 30° und die Cotangente von 60° allzeit mit einander verwechselt werden.

§. 698. Das Wachsen und Abnehmen der Cotangenten ist aus dem vorigen leicht zu schliessen. So lange der Bogen AD keine Grösse hat, ist die Cotangente unendlich groß, weil die Secante alsdenn in CA fällt, und die ohne Ende verlängerte NM niemals schneiden kan. Fängt der Punct D an nach F fortzurücken, so nimmt die Cotangente ab, und wird dem Halbmesser gleich, wenn AD 45° hält, sie verschwindet aber gäntzlich wenn AD ein Quadrant und DCA ein rechter Winckel wird. Wächst der Bogen und sein Winckel noch weiter, so fängt auch die Cotangente wieder an zu wachsen, sie muß aber in diesem Quadranten negativ genommen werden, wenn man die Cotangenten auf der

andern

andern Seite des Durchmessers FG als positiv betrachtet hat. Kömmt der Endpunct des Bogens in H, und ist FH = FD, so ist die Cotangente FN des stumpfen Winckels HCA, der Cotangente FM des spitzigen Winckels DCA, welcher mit jenem zween rechte Winckel ausmacht, gleich, und sie unterscheiden sich bloß dadurch, daß die eine negativ, und die andre positiv genommen werden muß. Fällt der Endpunct des Bogens in B, so wird die Cotangente wieder unendlich groß, in dem dritten Quadranten nimmt sie ab wie in dem ersten, biß sie zu dem Bogen AFG wieder verschwindet, und in dem vierten Quadranten wächst sie wie in dem zweyten, welches so beständig fortdauret, indem allzeit die Cotangenten in dem ersten und dritten Quadranten positiv, in dem zweyten und vierten hingegen negativ werden.

§. 699. Was von der Cosecante eines Bogens oder der Secante der Ergänzung desselben zu 90 Graden (Secans Complementi) zu sagen ist, läßt sich aus dem vorigen, besonders aus §. 695 leicht abnehmen.

Willkürlicher Satz.

§. 700. Wenn ein Bogen oder ein Winckel durch einen Buchstaben als A, B ꝛc. oder durch mehrere Buchstaben bezeichnet ist, so wird man die Ergänzung desselben zu 90° oder zu einem rechten Winckel (§. 676.) der Kürtze und mehre-

mehrerer Deutlichkeit wegen, durch Vorsetzung des Buchstabens *c* andeuten, folgendergestalt *c*A oder *c*B. Der Sinus eines Winckels wird durch *sin.* der Cosinus durch *cos.* die Tangente durch *tan.* und die Cotangente durch *cot.* bezeichnet, indem man diese Silben vor die Buchstaben setzet, welche die Bogen oder Winckel bedeuten, also *sin.* A, *cos.* B, *tan.* B, *cot.* B, *sin.* *c*A, *tan.* *c*A. Hieraus folgt, daß *sin.* *c*A eben soviel bedeuten wird als *cos.* A, und *cos.* *c*A soviel als *sin.* A (§. 686.), wie auch *tan.* *c*A soviel als *cot.* A. und *cot.* *c*A soviel als *tan.* A (§. 697.). Das Zeichen des Halbmessers ist *r*. Die Secanten und Quer-Sinus werden wir hier nicht gebrauchen.

Lehrsatz.

§. 701. Die Sinus, Cosinus, Quer-Sinus, Tangenten, Cotangenten, Secanten, Cosecanten, verhalten sich bey verschiednen Halbmessern wie diese Halbmesser.

Beweis.

Die Maaße des gegebenen Winckels C, welche mit den Halbmessern CA = CB und Ca = Cb beschrieben worden, sind AB, ab; die Sinus welche zu diesen Halbmessern gehören, BD, bd; die Cosinus, CD, Cd; die Quer-Sinus, DA, da; Fig. 167.

die

die Tangenten AE, ae; die Secanten CE, Ce. Weil nun die geraden Linien EA, BD, ea, bd, die auf eben der AC senckrecht stehen, alle parallel sind, so ist CB : Cb = BD : bd = CD : Cd. Es ist aber auch CB : Cb = CA : Ca, folglich CB : Cb = CA — CD : Ca — Cd = DA : da, und auch CA : Ca = AE : ae = CE : Ce. Von den Cotangenten und Cosecanten aber muß eben dieses richtig seyn, weil sie die Tangenten und Secanten der Ergänzung des gegebenen Winckels C zu einem rechten Winckel sind.

Zusatz.

§. 702. Es bleibt also auch bey einerley Winckel die Verhältniß des Halbmessers zu dem Sinus, zu der Tangente und den übrigen Linien, beständig eben dieselbe, man mag den Halbmesser annehmen wie man will, und man kan diese Verhältniß bey einem jeden Winckel, sowohl durch gerade Linien, als auch durch Zahlen ausdrücken, die von der Warheit sehr wenig abweichen.

Anmerckung.

§. 703. Es sind diese Verhältnisse, vor alle Winckel, welche durch Grade und Minuten gemessen werden, berechnet worden, und aus diesen Zahlen bestehen die grossen Tafeln der Sinus, Tangenten und Secanten, welche so wichtige Dienste leisten. Man hat in denselben den Halbmesser vor die Einheit

heit angenommen und in 10000000 Theile getheilet, neben jedem Grad und jeder Minute aber, welche man in ihrer Ordnung unter einander gesetzet hat, die Zahl dieser Theile geschrieben, welche in den zu diesen Bogen oder Winckeln gehörigen Sinus und Tangenten ꝛc. enthalten sind. Diesen Zahlen sind noch zur Bequemlichkeit der Rechnung ihre Logarithmen, jedoch mit veränderten Kennzifern beygefüget worden, welche man sonst in den Logarithmen-Tafeln nicht ohne Zeitverlust hätte suchen müssen.

§. 704. Wir haben der abgekürtzten Logarithmen-Tafel, welche sich am Ende der Arithmetick befindet, auch eine kleine Tafel der Sinus und Tangenten beygefüget, welche aber gar sehr zusammengezogen, und gantz anders eingerichtet ist, als die grossen Tafeln zu seyn pflegen. Der Halbmesser wird hier nur in 1000 Theile getheilet, und die Sinus, welche zu den Graden und Minuten gehören, die in der vierten Columne der Tafel stehen, welche mit Sin. bezeichnet ist, sind die Zahlen in der ersten Columne, welche man mit jenen in einer Quer-Reihe oder Zeile findet; die Logarithmen dieser Sinus aber stehen in eben dieser Quer-Reihe in der zweyten Columne. Auf die nehmliche Art findet man die Tangenten und die Logarithmen der Tangenten, welche zu den Graden und Minuten gehören, die in der fünften Columne, welche die Rubric Tan. führet, in eben der Zeile stehen. Diese Tangenten gehen aber nur bis auf 45 Grade, und man braucht auch diejenigen nicht, welche grösser sind als der Halbmesser, da man aus der sechsten Columne, welche das Zeichen Cot. hat, die Cotangenten der Winckel, welche über 45° halten, eben so leicht haben kan. Denn wenn man auch hier von den Graden und Minuten dieser Columne in einer Zeile bis in die erste Columne fortgehet, so findet man die zu denselben gehörige Cotangenten, und in der zweyten Columne in eben der Zeile die Logarithmen derselben. Ob zwar die dergestalt zusammengezogene Tafel, zu einer sehr genauen Rechnung bey weitem nicht hinlänglich ist, so kan man sie hingegen, bey solchen Rechnungen, wo es auf einen kleinen Fehler nicht ankommt, wegen ihrer Kürtze desto bequemer gebrauchen, besonders wenn man dasjenige inacht nimmt, was noch weiter unten erinnert werden soll.

Lehrsatz.

Fig. 168. §. 705. In einem rechtwincklichten Dreyeck ABC verhält sich die größte Seite AB zu der Seite AC, welche einem der spitzigen Winckel B entgegen gesetzt ist, wie r zu *sin.* B; und die Seite CB, welche an diesem Winckel liegt, verhält sich zu der ihm entgegengesetzten Seite AC, wie r zu *tan.* B.

Beweis.

Denn wenn man zu einem beliebigen Halbmesser BD = BE das Maaß DE des Winckels B, und seinen Sinus DG, wie auch seine Tangente EF beschreibt; so ist klar, daß AB : AC = DB : DG = r : *sin.* B; und CB : AC = EB : EF = r : *tan.* B.

Der 1. Zusatz.

§. 706. Weil eben dieses auch bey dem Winckel A seine Richtigkeit hat, welcher die Ergänzung des Winckels B, oder *c*B ist, so ist auch AB : BC = r : *sin.* *c*B, und AC : CB = r : *tan.* *c*.B, oder AB : BC = r : *cos.* B und AC : CB = r : *cot.* B.

Der 2. Zusatz.

§. 707. Wenn man die Proportionen AC : CB = r : *cot.* B, und CB : AC = r : *tan.* B gegeneinander hält, so sieht man, daß bey einem jeden Winckel B, sey *tan.* B : r = r : *cot.* B. Da nun auch bey einem jeden andern Winckel D, ist *tan.* D : r = r : *cot.* D, so ist auch überhaupt *tan.* D : *tan.* B = *cot.* B : *cot.* D. Es ist nehmlich allzeit der Halbmesser die mittlere Proportionallinie zwischen der Tangente eines Winckels und seiner Cotangente; und die Tangenten zweener Winckel verhalten sich wie ihre Cotangenten verkehrt genommen.

Der 3. Zusatz.

§. 708. Es ist aber aus der Zeichnung klar, daß EB : EF = BG : GD, das ist, r : *tan.* B = *cos.* B : *sin.* B, und daher $r \times$ *sin* B = *tan.* B $\times$ *cos.* B.

Da nun eben dieses auch in Absicht des Winckels A richtig ist, welcher cB ist, so wird auch seyn $r : tan. cB = cos. cB : sin. cB$, das ist, $r : cot. B = sin. B : cos. B$, und $r \times cos. B = cot. B \times sin. B$.

Der 4. Zusatz.

Fig. 169. 170. §. 709. Wenn in einem Dreyeck ABC, aus der Spitze des Winckels A, eine gerade Linie AD, auf die, wenn es nöthig ist, verlängerte Seite BC senckrecht fällt, so ist $AD : DB = r : tan. DAB$, und $AD : DC = r : tan. DAC$, folglich $DB : DC = tan. DAB : tan. DAC$.

Lehrsatz.

§. 710. Wenn A und B zween Bogen von einerley Cirkel bedeuten, welche kleiner sind als der halbe Umkreis, oder zween Winckel, welche von diesen Bogen gemessen werden, und es bezeichnet $tan. (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$ die Tangente der halben Summe, und $tan. (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$ die Tangente der halben Differenz dieser Bogen oder Winckel, so ist $tan. (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) : tan. (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) = (sin. A + sin. B) : (sin. A - sin. B)$.

Beweis.

Die halbe Summe der Bogen A und B ist bey den angenommenen Bedingungen allzeit kleiner als der halbe Umkreis, übrigens aber entweder grösser

grösser als ein Quadrant, oder kleiner als derselbe. Man setze zuerst daß sie kleiner sey, und mache in einem um den Mittelpunct C beschriebenen Cirkel, $DE = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ und $EF = EG = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B$. Fig. 171. Hierauf ziehe man den Halbmesser EC, und vereinige die Puncte G und F durch die gerade Linie FG, welche in H halbiret wird und auf EC senckrecht stehet. Man ziehe ferner den Halbmesser FC, und verlängere FG, bis sie den verlängerten Halbmesser CD bey I erreichet. In diesem Fall ist (§. 709.) $HI : HF$ oder $HG = tan.\, ICH : tan.\, HCF = tan.\, (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) : tan.\, (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B)$. Ferner ist der Bogen $DG = DE - EG = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = B$, daher $GM = sin.\, B$; und $DF = DE + EF = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B = A$, folglich $FN = sin.\, A$. Also ist $FK = sin.\, A - sin.\, B$, und weil $GF : GH = 2 : 1 = FK : HL$, so ist $HL = \frac{1}{2}sin.\, A - \frac{1}{2}sin.\, B$, und $HO = HL + GM = \frac{1}{2}sin.\, A - \frac{1}{2}sin.\, B + sin.\, B = \frac{1}{2}sin.\, A + \frac{1}{2}sin.\, B$. Da nun $IH : HG = HO : HL$, so ist allerdings $tan.\, (\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B) : tan.\, (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B) = (\frac{1}{2}sin.\, A + \frac{1}{2}sin.\, B) : (\frac{1}{2}sin.\, A - \frac{1}{2}sin.\, B) = (sin.\, A + sin.\, B) : (sin.\, A - sin.\, B)$.

Ist zweytens die halbe Summe der Bogen grösser als ein Quadrant, so nenne man den grössern Bogen B und den kleineren A, und mache $dE = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A$, und EF oder $EG = \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A$.

So ist auch nunmehr IH : HF oder GH = *tan.* $(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A)$: *tan.* $(\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A)$. Es ist aber $dG = dE + EG$ nichts anders als $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A = B$, und GM = *sin.* B; wie denn auch $dF = dE - EF = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A = A$, und FN = *sin.* A. Also ist auch in diesem Falle *tan.* $(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A)$: *tan.* $(\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A)$ = (*sin.* A + *sin.* B) : *sin.* A — *sin.* B).

Zusatz.

§. 711. Nimmt man anstatt dieser Bogen, die Ergäntzungen derselben zu 90 Graden, *c*A, *c*B, von denen die erste die grössere und die zwote die kleinere sey, so ist auf eben die Art *tan.* $(\frac{1}{2}cA + \frac{1}{2}cB)$: *tan.* $(\frac{1}{2}cA - \frac{1}{2}cB)$ = (*sin.* *c*A + *sin.* *c*B) : (*sin.* *c*A — *sin.* *c*B) = (*cos.* A + *cos.* B) : (*cos.* A — *cos.* B).

Lehrsatz.

Fig. 172. 173. §. 712. In einem jeden Dreyeck ABC verhalten sich jede zwo Seiten gegeneinander, wie die Sinus der diesen Seiten entgegengesetzten Winckel, die zu einem Halbmesser gehören, das ist AC : CB = *sin.* B : *sin.* A.

Beweis.

Denn wenn man aus der Spitze des Winckels C auf die, wenn es nöthig ist, verlängerte Seite AB, die gerade Linie CD senckrecht herabziehet, so ist

AC : CD

AC : CD = r : *sin.* A, und CB : CD = r : *sin.* B (§. 705). folglich AC : CB = *sin.* B : *sin.* A. (§. 175.).

Zusatz.

§. 713. Hieraus aber folgt AC + CB : AC — CB = (*sin.* B + *sin.* A) : (*sin.* B — *sin.* A) (§. 160.). Weil nun (*sin.* B + *sin.* A) : (*sin.* B — *sin.* A) = *tan.* ($\frac{1}{2}$B + $\frac{1}{2}$A) : *tan.* ($\frac{1}{2}$B — $\frac{1}{2}$A); so ist auch in einem jeden ebenen geradlinichten Dreyeck CA + CB : CA — CB = *tan.* ($\frac{1}{2}$B + $\frac{1}{2}$A) : *tan.* ($\frac{1}{2}$B — $\frac{1}{2}$A).

Anmerckung.

§. 714. Durch diese Lehrsätze (§. 705. 712. 713) werden die geradlinichten Dreyecke berechnet; das ist, man kan, wenn in einem Dreyeck diejenigen Seiten oder Winckel gegeben sind, welche die übrigen Seiten und Winckel des Dreyecks bestimmen, mit Hülfe der Sinus-Tafeln, aus den gegebenen Dingen, diejenigen finden, welche durch die gegebenen bestimmt werden. Es werden aber durch die blossen Winckel eines Dreyecks zwar die Verhältnisse seiner Seiten gegeneinander, nicht aber die Seiten selbst bestimmt. Denn es sind zwar alle Dreyecke, welche gleiche Winckel haben, einander ähnlich, und ihre Seiten sind proportional; es können aber übrigens diese Seiten eine jede Grösse haben.

Zween Winckel eines Dreyecks können niemals gegeben seyn, ohne daß dadurch zugleich der dritte bekannt werde (§. 298.). Sind also in irgend einem Dreyeck zween Winckel und eine Seite gegeben, so hat diese Seite in Ansehung der gegebenen Winckel beständig einerley Lage, und es werden durch diese Seite und durch die Winckel, die übrigen Seiten des Dreyecks bestimmt (§. 316.).

Ist nur ein Winckel eines Dreyecks bekannt, so müssen noch zwo Seiten gegeben seyn wenn man das Dreyeck beschreiben soll, und wenn diese den gegebenen Winckel einschliessen, so werden dadurch die übrigen Winckel und die dritte Seite völlig bestimmt (§. 312.).

Liegt aber der gegebene Winckel nicht zwischen den gegebenen Seiten, so wäre auch hier die dritte Seite völlig bestimmt, wenn die übrigen Winckel bestimmt wären. Dieses geschieht aber nicht allzeit, weil in einigen Fällen aus den gegebenen Dingen zwey verschiedne Dreyecke beschrieben werden können (§ 342.), deren eines stumpfwincklicht und das andre spitzwincklicht ist; und folglich öfters ein Zweifel übrig bleibt, ob der, der gegebenen Seite gegenüberliegende unbekannte Winckel stumpf oder spitzig sey. Dieser Zweifel kan durch den Sinus, welchen man hier findet, nicht gehoben werden, weil der stumpfe und spitzige Winckel, wovon die Rede ist, zusammen zween rechte Winckel ausmachen, folglich einerley Sinus haben (§. 682.).

Sind endlich nur die drey Seiten eines Dreyecks allein gegeben, so werden durch dieselben die Winckel völlig bestimmt (§. 319).

§. 715.

§. 715. Gleichwie wir also in der Geometrie die Dreyecke aus gegebenen Seiten oder Winckeln beschreiben lernen, so lernen wir hier dieselben berechnen. Man nennt diese Wissenschaft die ebene Trigonometrie; um sie von der sphärischen Trigonometrie zu unterscheiden, welche sich auf eben diese Art mit den Dreyecken beschäftiget, die auf der Oberfläche einer Kugel beschrieben werden. In beiden aber setzt man voraus, daß die Dreyecke möglich sind: so daß uns zum Beyspiel nicht auferlegt werde, die Winckel eines Dreyecks zu berechnen, in welchem zwo Seiten zusammengenommen kleiner sind als die dritte Seite.

Aufgabe.

§. 716. Wenn in einem ebenen geradlinichten Dreyeck drey Dinge gegeben sind, wodurch die übrigen bestimmt werden, diese übrigen Seiten oder Winckel so weit sie bestimmt werden, durch die Tafeln der Sinus und Tangenten zu berechnen.

Auflösungen.

I.

§. 717. Sind in dem Dreyeck ABC alle drey Winckel gegeben, und man nimmt aus den Tafeln die Sinus der Winckel A und C, so weis man die Verhältniß der Seite BC zu der Seite AB, weil BC : AB = *sin.* A : *sin.* C (§. 712.). Wenn Fig. 164.

man nun auch den Sinus des Winckels B in der Tafel suchet, so findet man auf eben die Art die Verhältniß der Seite AB oder BC zu der Seite AC.

II.

§. 718. Sind zween Winckel A und C gegeben, so ist auch der dritte B bekannt. Weis man nun außer diesem noch eine von den Seiten AB, so findet man die Seite BC, wenn man sagt: *sin.* C : *sin.* A = AB : BC; und die Seite AC, wenn man sagt *sin.* C : *sin.* B = AB : AC.

III.

§. 719. Wenn in einem rechtwincklichten Dreyeck der rechte Winckel B allein, und die zwo Seiten AB, BC welche denselben einschliessen gegeben sind, so findet man den Winckel C, wenn man sagt BC : AB = *r* : *tan* C (§. 705.), oder AB : BC = *r* : *cot.* C (§. 706.). Hat man auf diese Art den Winckel C, so ist auch A gegeben, welcher jenes Ergäntzung zu 90 Graden ist, und hieraus kan man die Seite AC nach der II. Auflösung finden.

IV.

§. 720. Wenn in einem schiefwincklichten Dreyeck der Winckel C gegeben ist, und zwo Seiten AC, BC, welche ihn einschliessen, so weis

man

man die Summe der beiden übrigen Winckel $B + A$ und die Helfte derselben $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A$. Macht man also $AC + BC : AC - BC = tan. (\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A) : tan. (\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A)$ (§. 713.); so findet man die halbe Differenz der gesuchten Winckel $\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A$; und es ist der grössere Winckel $B = (\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A) + (\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A)$, und der kleinere $A = (\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A) - (\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A)$. Sind auf diese Art die Winckel bekannt, so findet man wieder die Seite AC nach Aufl. II.

V.

§. 721. Wenn außer dem einzigen Winckel C eines Dreyecks, zwo Seiten AB, AC gegeben sind, welche diesen Winckel nicht einschliessen, so findet man den Winckel B wenn man sagt $AB : AC = \mathit{sin.}\, C : \mathit{sin.}\, B$. Weis man nun ob B spitzig oder stumpf sey, so ist auch A bekannt, und hieraus findet man die dritte Seite nach Aufl. II.

VI.

§. 722. Wenn in einem gleichschencklichten Dreyeck ABC alle Seiten gegeben sind, und man zieht die AD auf die Grundlinie senckrecht, so ist BD, die Helfte der Grundlinie, bekannt. Daher werden die Winckel des rechtwincklichten Dreyecks ABD nach der V. Aufl. gefunden. Ein jeder von diesen Winckeln aber giebt alle Winckel des gleichschencklichten Dreyecks. (§. 314.). Fig. 175.

VII.

VII.

Fig. 176. §. 723. Sind in dem ungleichseitigen Dreyeck ABC alle Seiten gegeben; so beschreibe man aus dem Mittelpunct A, als der Spitze desjenigen Winckels, welcher der größten Seite BC entgegen stehet, mit dem Halbmesser AC, welches die kleinste Seite ist, einen Cirkelkreis. Wenn man nun BA in E verlängert, so ist BE = BA + AC und BF = BA — AC, folglich ist sowohl BE als BF gegeben. Da aber BC : BE = BF : BD (§. 423.), so findet man durch diese Proportion BD, und hieraus DC = BC — BD. Zieht man also AD, so sind in dem gleichschencklichten Dreyeck ADC alle Seiten, folglich auch durch die VI. Aufl. alle Winckel gegeben. Einer von diesen Winckeln ist C, woraus man die übrigen Winckel des Dreyecks ABC auf verschiedne Arten leicht findet.

Anmerckung.

§. 724. Es müssen überhaupt alle Winckel eines Dreyecks bekannt seyn, bevor man die unbekannte Seiten berechnen kan. Bey den Seiten aber, welche man durch die angegebenen Proportionen findet, kan keine Zweydeutigkeit statt haben, ob dieselben gleich durch Sinus oder Tangenten bestimmt werden, welche zugleich zu stumpfen und spitzigen Winckeln gehören.

§. 725.

§. 725. Wird aber ein Winkel durch seinen Sinus, oder durch die blosse Grösse seiner Tangente gegeben, so ist noch auszumachen, ob der Winckel spitzig oder stumpf sey (§ 682 693). Bey der III. Auflösung sieht man dieses leicht, weil dort von Winckeln eines rechtwincklichten Dreyecks die Rede ist, welche allzeit spitzig sind. Und weil in Aufl. IV. der grössere von den gesuchten Winckeln B, kleiner ist als zween rechte Winckel, so ist um desto mehr B—A kleiner als 2R, folglich die Helfte desselben $\frac{1}{2}$B — $\frac{1}{2}$A kleiner als ein rechter Winckel oder spitzig, und es kan auch hier kein Zweifel übrig bleiben.

§. 726. In der V. Aufl. hingegen, wo der Winckel durch seinen Sinus bestimmt wird, bleibt allzeit ein Zweifel übrig ob der Winckel spitzig oder stumpf sey, wenn dieser Zweifel nicht durch die übrigen Bedingungen bey dem Dreyeck gehoben wird. Diese Bedingungen sind, daß die dem gegebenen Winckel B entgegengesetzte Seite AC, grösser sey als die Seite AB, welche an diesem Winckel liegt, indem alsdenn der Winckel C welchen man suchet, allzeit spitzig wird. Denn es ist derselbe nothwendig kleiner als B, folglich kan er kein rechter oder stumpfer Winckel seyn wenn B spitzig ist; und ist B ein rechter oder stumpfer Winckel, so kan C wie bekannt ist, ebenfalls nicht anders als spitzig seyn. Ist aber der Winckel C gegeben, und die Seite AC ist grösser als AB, so kan der Winckel B ein spitziger, rechter, oder stumpfer Winckel seyn. Findet man also, daß er kein rechter Winckel ist, so bleibt es allzeit zweifelhaft ob er stumpf oder spitzig sey. Fig. 174.

§. 727.

Fig. 175. 176. §. 727. Endlich sind bey Aufl. VI. und VII. die Winckel B und C allzeit spitzig, da allein der Winckel BAC, welcher der größte von allen ist, ein rechter oder stumpfer Winckel seyn kan. Hat man aber die Winckel B und C berechnet, so ist der dritte Winckel völlig bestimmt.

§. 728. Bey der Rechnung selbst findet man keine Schwierigkeit, so lange nicht eine grössere Schärfe derselben erfordert wird, als die Tafeln so wie sie sind, geben können. Man kan aber die Tafeln etwas erweitern, und aus solchen, die nur zu Graden und Minuten eingerichtet sind, auch die Sinus solcher Winckel finden, welche außer den Graden und gantzen Minuten noch Secunden enthalten. Die Regeln nach welchen dieses geschiehet, sind von denjenigen, die man am Ende der Lehre von den Logarithmen, zu dem Gebrauch der Differenzen gegeben hat, nicht unterschieden. Ist also ein Winckel a bekannt, dessen Sinus man in der Tafel findet, ein andrer Winckel A, welcher nur um eine, oder wenige Minuten grösser ist als der erste, und dessen Sinus man ebenfalls aus der Tafel nehmen kan, und endlich ein dritter Winckel α, welcher zwischen jenen stehet, und dessen Sinus man zu wissen verlangt; so verhalten sich ohne sonderlichen Fehler die Differenzen dieser Winckel wie die Differenzen ihrer Sinus; folglich $(A - a) : (\alpha - a) = (\mathit{sin.}\ A - \mathit{sin.}\ a) : (\mathit{sin.}\ \alpha - \mathit{sin.}\ a)$. Aus dieser Proportion findet man $\mathit{sin.}\ \alpha$, wenn der Winckel α bekannt ist, oder den Winckel

α,

α, wenn man *sin.* α hat; und man kan an die Stelle der Sinus auch die Tangenten, oder die Logarithmen der Sinus und Tangenten nehmen, und mit denselben eben so verfahren Es lassen sich aber diese Regeln bey unsrer zusammengezogenen Tafel nicht mit so gutem Erfolg anwenden als bey den vollständigern Tafeln, weil in der unsrigen die neben einer jeden Zahl, welche einen Sinus oder eine Tangente anzeigt, stehende Zahl der Minuten nicht vollkommen richtig ist. Ob man nun zwar auch diese Unrichtigkeit vermindern kan, so ist dieses doch so mühsam, daß es bey einer schärferen Rechnung rathsamer ist, weitläuftigere Tafeln zu Hülfe zu nehmen, unter welchen zur Zeit Sherwin's Mathematical Tables die bequemsten sind.

§. 729. Es gehen aber auch in unsrer Tafel die Tangenten nicht weiter als bis auf 45 Grade, indem zu den grösseren Winckeln anstatt der Tangenten, ihre Cotangenten gesetzt sind. Da man nun die Winckel welche grösser sind als $\frac{1}{2}$R zwar öfters, aber nicht immer vermeiden kan, so ist noch zu zeigen wie aus der Tafel der Logarithme der Tangente eines Winckels zu nehmen sey, welcher 45° übersteigt. Dazu aber dient die Regel $tan.\,A : r = r : cot.\,A$ (§. 707.), woraus folgt $log.\,tan.\,A - log.\,r = log.\,r - log.\,cot.\,A$. (§. 212.), und $l.\,tan.\,A = 2lr - l.\,cot.\,A$, wie auch $l.\,cot.\,A = 2lr - l.\,tan.\,A$. Nur muß man hier anmercken, daß in unsrer Tafel $log.\,r = 3,00000$ und folg-

folglich 2 *lr* = 6, 00000. Man muß also den Logarithmen einer Cotangente, von dieser Zahl 6, 00000 abziehen, wenn man den Logarithmen der Tangente eben des Winckels haben will, und umgekehrt. Zuweilen kan man auch den Tangenten und Cotangenten welche nicht in der Tafel stehen, dadurch ausweichen, daß man anstatt der Verhältniß der Tangenten sich der Verhältniß der Cotangenten verkehrt genommen, oder jener anstatt dieser bedienet (§. 707.). Alles dieses wird bey den Exempeln mit erläutert werden.

I. Exempel zu §. 717.

§. 730. Es sey der Winckel A = 61°, 15′,
Fig. B = 94°, 20′, dessen Ergäntzung zu 180 Graden ist
174. 85°, 40′, und C = 24°, 25′; so findet man aus unsrer verkürtzten Tafel *sin.* A = 877, *sin.* B = 997 und *sin.* C = 413 : also AB : AC = *sin.* C : *sin.* B = 413 : 997; AB : BC = *sin.* C : *sin.* A = 413 : 877 und AC : BC = *sin.* B : *sin.* A = 997 : 877. In den vollständigern Tafeln aber, findet man *sin.* A = 8767268, *sin* B = 9971413 und *sin* C = 4133693; welche Zahlen die Verhältnisse der Seiten genauer geben.

II. Exempel zu §. 718.

§. 731. Es seyn auch hier die Winckel, A = 61°, 15′, B = 94°, 20′, folglich C = 24°, 25′; die Seite BC aber sey = 567, 036 so wird die Seite AB aus der kleinen Tafel also gefunden:

log.

log. sin. A = 2, 94299
log. sin. C = 2, 61595 add. subtr.
log. BC = 2, 76863

5, 38458

log. AB = 2, 44159

Es ist also die Seite AB = 276, +

Die Seite AC findet man auf eben die Art durch folgende Rechnung:

log. sin. A = 2, 94299
log. sin. B = 2, 99869 add. subtr.
log. BC = 2, 76863

5, 76732

log. AC = 2, 82433

also die Seite AC = 667, +

Aus der grössern Tafel findet man genauer

log. sin. A = 9, 9428643
log. sin. C = 9, 6163382
log. BC = 2, 7686647

12, 3850029

log. AB = 2, 4421386

folglich ist die Seite AB = 276, 783.

Eben so findet man die Seite AC genauer, wenn man aus den grossen Tafeln nimmt

$$\begin{aligned} log.\ sin.\ A &= 9,9428643 \\ log\ sin.\ B &= 9,9987567 \\ log.\ BC &= 2,7686647 \\ \hline & \quad 12,7674214 \\ \hline log\ AC &= 2,8245571 \end{aligned}$$

Folglich ist die Seite AC = 667, 663.

III. Exempel zu §. 719.

§. 732. Ist B ein rechter Winckel, und die Seite BC = 327, AB aber = 241, so wird aus der kleinen Tafel der Winckel C durch folgende Rechnung heraus gebracht.

$$\begin{aligned} log.\ BC &= 2,51454 \\ log.\ AB &= 2,38201 \\ log.\ r &= 3,00000 \\ \hline & \quad 5,38201 \\ \hline log.\ tan.\ C &= 2,86747 \end{aligned}$$

Es ist also der Winckel C = 36°, 24′, folglich A = 53°, 36′, woraus man die dritte Seite AC nach Exemp. II. findet.

Aus den grössern Tafeln aber ist

$$\begin{aligned} log\ BC &= 2,5145478 \\ log.\ AB &= 2,3820170 \\ log.\ r &= 10,0000000 \\ \hline & \quad 12,3820170 \\ \hline log.\ tan.\ C &= 9,8674692 \end{aligned}$$

Folg=

Folglich ist der Winckel C etwas grösser als 36°, 23′.

IV. Exempel zu §. 720.

§. 733. Es sey der gegebene Winckel $B = 94°, 20'$, von den Seiten aber die diesen Winckel einschliessen, sey $AB = 276,783$, und $BC = 587,036$: so ist die Summe der Winckel $A + C = 180° - B = 85°, 40'$, folglich $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C = 42°, 50'$; $BC + AB$ ist $= 86\ ,819$ und $BC - AB = 3\,0, 253$ Man findet also die übrigen Winckel aus der kleinen Tafel durch folgende Rechnung:

$$\begin{aligned}
&log.\ 864 = 2,93651 \\
&log.\ 310 = 2,49136 \\
&log.\,tan.\,(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}C) = 2,96708 \\
&\hline
&\qquad 5,45844 \\
&\hline
&log.\,tan.\,(\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}C) = 2,52193
\end{aligned}$$

Hiezu gehört der Winckel $\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}C = 18°, 25'$, woraus man findet $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C) + (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}C)$, das ist $A = 42°, 50' + 18°, 25' = 61°, 15'$, und $(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C) - (\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}C)$ das ist $C = 42°, 50' - 18°, 25 = 24°, 25'$. Aus den grossen Tafeln ist

$$\begin{aligned}
&log\ (BC + AB) = 2,9364227 \\
&log.\ (BC - AB) = 2,4917160 \\
&log.\,tan.\,(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}C) = 9,9671225 \\
&\hline
&\qquad 12,4588385 \\
&\hline
&log.\,tan.\,(\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}C) = 9,5224158
\end{aligned}$$

 Folglich

Folglich $\frac{1}{2}$ A — $\frac{1}{2}$ C etwas kleiner als 18°, 25′.

V. Exempel zu §. 721 und 726.

§. 734. Es sind die Seiten BC = 587, 036, AB = 276, 783 und der Winckel A = 61°, 15′ gegeben, man will aber den Winckel C berechnen; so ist aus den grösseren Tafeln

$$\left.\begin{array}{l} \log\ BC = 2,\ 7686647 \\ \left.\begin{array}{l}\log.\ AB = 2,\ 4421386 \\ \log.\ sin.\ A = 9,\ 9428643\end{array}\right\} \\ \hline \qquad 12,\ 3850029 \end{array}\right]$$

$$\log.\ sin.\ C = 9,\ 6163382$$

Zu diesem gehört der spitzige Winckel 24°, 25′. Denn es kan der stumpfe Winckel von 155°, 35′, welcher eben den Sinus hat, in diesem Dreyeck nicht gebraucht werden, da derselbe mit dem gegebenen Winckel A zusammengenommen, mehr als zween rechte Winckel ausmacht.

§. 735 Sind aber eben die Seiten AB und BC, und anstatt A der Winckel C = 24°, 25′ gegeben, daß also der Winckel A nunmehr der gesuchte wird, so ist

$$\left.\begin{array}{l} \log\ AB = 2,\ 4421386 \\ \left.\begin{array}{l}\log.\ BC = 2,\ 7686647 \\ \log.\ sin.\ C = 9,\ 6163382\end{array}\right\} \\ \hline \qquad 12,\ 3850029 \end{array}\right]$$

$$\log.\ sin.\ A = 9,\ 9428643.$$

Hiezu

Hiezu gehören die beiden Winckel 61°, 15′, und 118°, 45′. Da nun ein jeder derselben, wenn man ihn zu dem Winckel C = 24°, 25′ addiret, eine Summe giebt welche kleiner ist als 180°, so können bey den gegebenen Bedingungen des Dreyecks beide Winckel gebraucht werden, und man muß aus andern Umständen bestimmen, welcher von beiden in jedem besondern Falle zu nehmen sey.

VI. Exempel zu §. 722.

§. 736. Es sey in dem gleichschencklichten Dreyeck ABC, die Seite AC = 837, BC = 1426; folglich DC = 713; so ist AC : DC = *r* : *sin.* DAC, und man findet aus der kleinen Tafel Fig. 175.

log. AC	=	2, 92272
log. DC	=	2, 85309
log. *r*	=	3, 00000
		5, 85309
log. *sin.* DAC	=	2, 93037

Folglich ist der Winckel DAC = 58°, 26′, und C = R — DAC = 31°, 34′.

VII. Exempel zu §. 723.

§. 737. Es sey in dem ungleichseitigen Dreyeck ABC, die größte Seite BC = 973, AB = 721 und AC = 380; so ist BF = AB — AC = 341, Fig. 176.

BE = AB + AC = 1101; folglich 973 : 1101 = 341 : BD, und BD = $\frac{1101 \times 341}{973}$ = 385, 8 welches man auch durch die Logarithmen rechnen kan. Hieraus findet man ferner DC = BC — BD = 587, 2 und $\frac{1}{2}$ DC = 293, 6 und aus dieser und der Seite AC den Winckel $\frac{1}{2}$ DAC, und endlich den Winckel C.

VIII. Exempel zu §. 728.

§. 738. Man soll den Sinus und den *Log. Sin.* eines Winckels von 33°, 57′, 19″ finden; so ist aus den grössern Tafeln der Sinus von 33°, 57′ = 5584692, und die Differenz desselben von dem nächstfolgenden 2413 Die Differenz der zu diesen Sinus gehörigen Winckel ist 1 Minute oder 60 Secunden, und die Differenz des gegebenen Winckels von dem nächsten kleinern in der Tafel ist 19″. Folglich ist

$$60'' : 19'' = 2413 : q$$

und $q = 764$ die gesuchte Differenz der Sinus, welche zu dem Sinus 5584692 addiret, vor einen Winckel von 3°, 57′, 19″ den Sinus 5585456 herausbringt.

Will man den *Log. Sin.* dieses Winckels haben, so nimmt man aus den Tafeln *log sin* 33°, 57′ = 9, 7469992. Die Differenz dieses Logarithmen und der nächstfolgenden ist 1876; also auch hier 60″ : 19″ = 1876 : q,

und

und $q = 594$ die gesuchte Differenz der Logarithmen welche zu dem Logarithmen von $33°, 57'$ addiret, den *log. sin.* $33°, 57', 19'' = 9,7470586$ giebt.

§. 739. In dem III. Ex. (§. 732.) hat man gefunden *log tan.* $C = 9,8674692$ und zu demselben den Winckel $C = 36°, 23' +$. Will man hiezu auch die Secunden haben, so nimmt man aus der Tafel *log. tan.* $36°, 23' = 9,8673583$. Die Differenz dieses Logarithmen von dem nächstfolgenden in der Tafel ist 2645, und seine Differenz von dem gefundenen ist 1109; folglich

$$2645 : 1109 = 60'' : q$$

und $q = 25''$ die gesuchte Differenz der Winckel, welche zu dem gesuchten Winckel addiret, $36°, 23', 25''$ giebt.

IX. Exempel zu §. 729.

§. 740. In dem III. Exemp. wo B ein rechter Winckel ist, hat man aus der kleineren Tafel den Winckel C gefunden, welcher kleiner ist als 45°. Hätte man den Winckel A gesucht, so hätte man setzen müssen. Fig. 174.

$$\left.\begin{array}{lcl} log.\ AB & = & 2,\ 38201 \\ \left.\begin{array}{lcl} log.\ BC & = & 2,\ 51454 \\ log.\ r & = & 3,\ 00000 \end{array}\right\} & & \\ \hline & & 5,\ 51454 \end{array}\right\}$$

$$log.\ tan.\ A = 3,\ 13253$$

Dieser Logarithme steht nicht in unsrer Tafel; und kan also den Winckel nicht unmittelbar geben. Man subtrahire ihn also von 6, 00000, so erhält man *log. cot.* A = *log. tan.* C = 2, 86747.

§. 741. Es sey in dem Dreyeck ABC, (Ex. IV.) der Winckel C = 24°, 25′, so wird A + B = 180° — C = 155°, 35′; folglich $\frac{1}{2}$A + $\frac{1}{2}$B = 77°, 48′. Nun sey AC = 2430 und BC = 758, so ist AC + BC = 3188, und AC — BC = 1672. Man soll *log. tan.* 77°, 48′ finden. Weil diese Tangente nicht in unsrer Tafel steht, so nehme man *log. cot.* 77°, 48′ welcher ist 2, 33445 und subtrahire diesen von 6, 00000, so erhält man *log. tan.* von eben diesem Winckel = 3, 66555, worauf man wie vorher rechnen kan

$$\begin{array}{lcr} log.\ (AC + BC) & = & 3,50352 \\ log.\ (AC - BC) & = & 3,22324 \\ log.\ tan.\ (\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A) & = & 3,66555 \\ \hline & & 6,88879 \\ \hline log.\ tan.\ (\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A) & = & 3,38527 \end{array}$$

Diese Tangente steht wieder nicht in unsrer Tafel, man ziehe sie also von 6, 00000 ab, so erhält man *log. cot.* ($\frac{1}{2}$B — $\frac{1}{2}$A) = 2, 61473, wozu der Winckel 67°, 36′ gehöret. Wenn man diesen zu $\frac{1}{2}$B + $\frac{1}{2}$A = 77°, 48′ addiret, so findet man den Winckel B = 145°, 24′, und wenn man subtrahiret, den Winckel A = 10°, 12′.

§. 742. Weil die Verhältniß der Tangenten der Verhältniß der Cotangenten verkehrt genommen gleich ist, so kan man diese Rechnung auch kürzer also verrichten:

$$\begin{array}{lr}
\log.\ (AC - BC) = & 3,\ 22324 \\
\log.\ (AC + BC) = & 3,\ 50352 \\
\log.\cot.\ (\tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}A) = & 2,\ 33445 \\
\hline
 & 5,\ 83797 \\
\hline
\log.\ \cot.\ (\tfrac{1}{2}B - \tfrac{1}{2}A) = & 2,\ 61473
\end{array}$$

zu welchem der vorige Winckel gehöret, und woraus man alles übrige wie vorher findet.

Vierter Abschnitt.

Die Sphärische Trigonometrie.

Erklärung.

§. 743.

Wenn die Spitzen von drey oder mehreren ebenen Winckeln, die in verschiednen Flächen liegen, zusammenfallen, und es fallen auch zween und zween Schenckel dieser Winckel zusammen, so nennt man den Raum welchen dieselben einschliessen, einen Körperlichen Winckel (Angulus solidus). Die Seiten desselben sind diese ebenen Winckel, welche den Körperlichen einschliessen, und seine Winckel sind die Neigungen der Flächen gegen einander, in welchen die ebenen Winckel beschrieben sind. So sind
Fig. 177. die Seiten des Körperlichen Winckels ABCD, diese, ACB, ACD, DCB, und von seinen Winckeln ist der erste B, die Neigung der Ebene ACB gegen die Ebene DCB; der zweyte D, die Neigung der Ebene ACD gegen die Ebene DCB, und der dritte

dritte A, die Neigung der Ebene ACD gegen die Ebene ACB.

Anmerckung.

§. 744. Ein Körperlicher Winckel kan mehr als drey Seiten, ja eine jede Anzahl derselben haben: auch liegt nichts daran, auf was für Art diese Seiten begrenzt sind, oder ob sie einige Grentzen haben. Begrenzt man sie aber durch Cirkelbogen, welche mit einerley Halbmesser aus dem Mittelpunct C beschrieben sind, so werden diese Bogen die Maaße der Seiten, und fallen selbst in die Oberfläche einer Kugel, die man um C beschreiben kan, so daß sie Theile der Umkreise von drey größten Cirkeln dieser Kugel werden. Da aber ein jeder Winckel wie B, einem Winckel gleich ist, welchen zwo gerade Linien einschliessen, deren eine in der Ebene ACB, und die andre in der Ebene BCD auf einem Punct der geraden Linie CB senckrecht stehet (§. 494.), so kan B dieser Punct seyn. In diesem Fall wird eine gerade Linie, welche in der Ebene des Ausschnittes ACB auf dem Halbmesser CB senckrecht stehet, den Bogen AB in B berühren, und die gerade Linie welche in der Ebene DCB auf eben dieser CB senckrecht steht, berührt der Bogen DB in eben diesem Punct B (§. 366). Also ist überhaupt ein jeder Winckel eines Körperlichen Winckels, einem Winckel gleich, welchen zwo auf diese Art gezogene Tangenten einschliessen.

Erklärung.

§. 745. Ein sphärisches, oder ein Kugel-Dreyeck ABD ist der Theil einer Kugel-Oberfläche, welcher von drey Bogen größter Cirkel dieser Kugel AB, BD, AD begrenzt wird: die Seiten desselben sind diese Bogen AB, BD, AD, die Winckel hingegen, diejenigen, welche die bey den Puncten A, B, D diese Bogen berührende Linien mit einander einschliessen.

Anmerckung.

§. 746 Wenn aus den Spitzen der Winckel A, B, D eines Kugel-Dreyecks ABD, an den Mittelpunct der Kugel die geraden Linien AC, BC, DC gezogen werden, so entsteht ein dreyseitiger körperlicher Winckel, dessen Winckel mit den Winckeln des Kugel-Dreyecks einerley, seine Seiten aber, die Winckel der Ausschnitte ACB, BCD, DCA sind, welche durch die Bogen AB, BD, DA gemessen werden. Wenn man daher die Seiten und Winckel des Kugel-Dreyecks durch Grade und Minuten ausdrückt, so können eben diese Zahlen auch die Winckel und Seiten des körperlichen Winckels andeuten, und es ist wenn man bloß auf diese Maaße sieht, unter einem dreyseitigen körperlichen Winckel und einem Kugel-Dreyeck kein Unterschied zu machen. Es ist aber die Betrachtung eines dreyseitigen körperlichen Winckels meistens leichter als die Betrachtung eines Kugel-Dreyecks; und man wird

daher,

daher, was von diesen Dreyecken zu sagen ist, aus der Betrachtung solcher körperlichen Winckel herleiten.

§. 747. Man kan sich aber folgende allgemeine Beschreibung eines dreyseitigen körperlichen Winckels und eines Kugel-Dreyecks vorstellen. Es wird ein Ausschnitt eines Cirkels DCB zur Grundfläche angenommen, und aus dessen Mittelpunct C, eine gerade Linie CA nach Willkühr in die Höhe, das ist, auser der Ebene des Ausschnittes gezogen. Hierauf beschreibt man aus dem Mittelpunct C in der Ebene ACD den Bogen AD, welcher den Ausschnitt ACD begrenzet, und auf eben die Art begrenzt man in der Ebene ACB den Ausschnitt ACB. Der Ausschnitt BCD, welchen man zur Grundfläche angenommen hat, kan grösser oder kleiner seyn als ein halber Cirkel.

Lehrsatz.

§. 748. Wenn in einem Kugel-Dreyeck, eine Seite kleiner ist als ein halber Umkreis, so ist auch der dieser Seite entgegengesezte Winckel kleiner als zween rechte Winckel; ist hingegen die Seite grösser als der halbe Umkreis, so ist auch der Winckel grösser als 2 R.

Beweis.

Es sey AB der Durchmesser des um den Mittelpunct C beschriebenen Cirkels ABD, und man Fig. 178.
habe

habe die gerade Linie CE auf die Ebene dieses Cirkels senckrecht oder schief gestellet, durch AB und diese CE aber einen halben Cirkel gelegt, der eben den Durchmesser AB hat. Nimmt man nun den Ausschnitt ACD, welcher kleiner ist als ein halber Cirkel zu einer Grundfläche an, und vollendet das Kugel-Dreyeck AED, so ist klar, daß der Winckel AED, welcher der Seite AD entgegenstehet, kleiner sey als zween rechte Winckel, weil AED + DEB zween rechte Winckel ausmacht. Wenn man hingegen den Ausschnitt ABDC welcher grösser ist als ein halber Cirkel zur Grundfläche nimmt, wodurch, indem die übrigen Seiten bleiben, an die Stelle der Seite AD, die Seite ABD kommt welche grösser ist als der halbe Umkreis, so stehet dieser Seite der äusere Winckel AED entgegen, welcher mit dem inneren AED vier rechte Winckel ausmacht, folglich nothwendig grösser seyn muß als 2 R.

Zusatz.

§. 749. Man sieht aus eben dieser Zeichnung, daß wenn man eine von den Seiten eines Kugel-Dreyecks als AE, in EB verlängert, dadurch ein andres Dreyeck EBD neben dem vorigen ADE entstehe, dessen Winckel B dem Winckel A gleich ist; seine Winckel bey E und D aber sind die Ergäntzungen zu 180° der Winckel bey E und D des Dreyecks ADE. Diese beiden Dreyecke haben die Seite ED

ED gemeinschaftlich, BD aber ergänzt die Seite AD, und EB die Seite EA zu 180 Graden.

Anmerckung.

§. 750. Man pflegt die Kugel-Dreyecke wie ABDE, in welchen eine Seite grösser ist als ein halber Umkreis nicht zu betrachten, weil man sie ohnehin kennet, sobald dasjenige Dreyeck EACD, welches einem solchen Dreyeck an dem Mittelpunct C entgegenstehet, bekannt ist. Diejenigen Kugel-Dreyecke also, welche man betrachtet, haben weder eine Seite die grösser ist als der halbe Umkreis, noch einen Winckel der zween rechte Winckel übertrift.

§. 751. Ubrigens ist der Winckel A oder B, welchen die Ebene AEB mit der zur Grundfläche genommenen Ebene ABD einschließt, entweder ein rechter oder schiefer Winckel. Ist er ein rechter Winckel, so ist das Kugel-Dreyeck rechtwincklicht; die Seite, welche diesen Winckel entgegensteht, heißt die Hypothenuse, von den übrigen Seiten aber, eine die Grundseite, und die andre das Perpendikel. Sind hingegen alle Winckel schief, so heißt das Dreyeck schiefwincklicht.

§. 752. Man wird hier der Kürtze wegen in einem rechtwincklichten Kugel-Dreyeck die Grundseite durch B oder b, das Perpendikel durch P oder p, und die Hypothenuse durch H oder h andeuten. Den rechten Winckel wird man mit R oder r, den Win-

Winckel, welcher zwischen der Grundseite und der Hypothenuse dem Perpendikel gegenüber liegt mit M oder m, und endlich den der Grundseite entgegenstehenden Winckel, welchen die Hypothenuse mit dem Perpendikel einschließt mit N oder n bezeichnen.

Lehrsatz.

Fig. 179. §. 753. Nach dem in einem rechtwincklichten Kugel-Dreyeck NRM, der Winckel M einem rechten Winckel gleich, oder kleiner, oder grösser ist als derselbe, ist auch die diesem Winckel entgegengesetzte Seite P einem Quadranten gleich, kleiner, oder grösser als ein Quadrant.

Beweis.

Man stelle durch die gerade Linie CM, in welcher die Ebene der Hypothenuse die Ebene der Grundseite schneidet, die Ebene MCD auf die Ebene der Grundseite senckrecht. Da nun auch die Ebene P auf dieser Ebene B senckrecht stehet, so ist auch DC, der Durchschnitt der Ebenen P und MCD der Ebene B perpendicular (§. 499.), und DR oder Dr ein Quadrant. Folglich ist die Seite NR kleiner als ein Quadrant, einem Quadranten gleich, oder grösser als derselbe, nach dem die Hypothenuse H auf eine oder die andre Seite

der

der Ebene DCM, oder in diese Ebene selbst fällt, das ist, nach dem der Winckel M dem rechten Winckel DMR gleich, oder kleiner, oder grösser ist als derselbe.

Zusatz.

§. 754. Wenn man P zur Grundseite nimmt, wird B das Perpendikel. Es richtet sich also auch der Winckel N nach der ihm gegenüberliegenden Seite; und ist spitzig, wenn die Seite B kleiner ist als ein Quadrant, stumpf, wenn die Seite B den Quadranten übertrift, und endlich einem rechten Winckel gleich, wenn B ein Quadrant ist. Denn es ist leicht einzusehen, daß man von der Seite auf den ihr entgegenstehenden Winckel, eben sowohl als von dem Winckel auf die Seite den Schluß machen könne.

Lehrsatz.

§. 755. **Wenn in einem rechtwincklichten Kugel-Dreyeck, die Seiten B und P beide kleiner oder beide grösser sind als Quadranten, so ist die Hypothenuse kleiner als ein Quadrant; ist eine von diesen Seiten B oder P kleiner als ein Quadrant und die andre grösser, so ist die Hypothenuse grösser; ist aber eine von diesen Seiten selbst ein Quadrant, so ist auch die Hypothenuse einem Quadranten gleich.**

Beweis.

Fig. 180. Man ziehe in der Ebene RMr, in welcher die Grundseite liegt, und auf welcher die Ebene RAr senckrecht stehet, die gerade Linie MC schief auf den Durchmesser rR. Auf diese MC stelle man die Ebene DAE senckrecht, welche die Ebene rAR in AC schneide: so sind ACR, ACr rechte Winckel (§. 499.), und AR, Ar Quadranten; ein jeder Winckel aber, welchen die CM mit einer in der Ebene DAE durch den Punct C gezogenen geraden Linie einschließt, ist ein rechter Winckel (§. 488.). Folglich sind GCM und gCM rechte Winckel, NCM ist kleiner, und nCM grösser als ein rechter Winckel. Also ist in dem Kugel-Dreyeck NRM, dessen Seiten B, P kleiner sind als Quadranten, die Hypothenuse NM kleiner als der Quadrant GM, und eben dieses ist in dem Dreyeck NrM richtig, dessen Seiten Nr, rM beide grösser sind als Quadranten. Aber in dem Kugel-Dreyeck nRM, in welchem nR oder P grösser ist als ein Quadrant, hingegen MR oder B kleiner, ist die Hypothenuse Mn grösser als der Quadrant Mg, und eben so ist es in dem Kugel-Dreyeck nMr, in welchem rM oder B grösser, und nr oder P kleiner ist als ein Quadrant. Wird endlich AR das Perpendikel P, so mißt die Hypothenuse den rechten Winckel ACM, und wird also einem Quadranten gleich.

Zusatz.

Zusatz.

§. 756. Hieraus folgt umgekehrt: wenn die Hypothenuse eines rechtwincklichten Kugel-Drey-ecks, weniger als 90° hält, so müssen die Seiten B und P beide kleiner oder beide grösser seyn als Quadranten; hält die Hypothenuse mehr als 90°, so ist eine von den übrigen Seiten B oder P grösser als ein Quadrant, und die andre kleiner; und wenn die Hypothenuse ein Quadrant ist, so ist auch entweder B oder P ein Quadrant.

Anmerckung.

§. 757. Man kan also zwo verschiedne Arten rechtwincklichter Kugel-Dreyecke machen, in deren einer die Hypothenuse kleiner ist als ein Quadrant, und in der andern den Quadranten übertrift. Denn was die dritte Gattung anlangt, in welcher die Hypothenuse selbst ein Quadrant ist, so kan dieselbe mit gleichem Recht zu einer jeden der ersteren Gattungen gerechnet werden, eben so wie wir den rechten Winckel als den größten unter allen spitzigen, und als den kleinsten unter allen stumpfen Winckeln betrachten.

§. 758. Wenn aber die Hypothenuse kleiner ist als ein Quadrant, so gehört dieselbe sowohl zu dem Dreyeck NMR, dessen beide Seiten B, P kleiner sind als Quadranten, und dessen Winckel M, N spitzig sind, als auch zu dem Dreyeck NMr, welches neben dem ersten liegt. Ist die Hypothenuse grösser

ser als ein Quadrant, so ist das Dreyeck entweder nMr, welches hier der Hypothenuse zur lincken liegt, oder das zur rechten nMR. Das erste von diesen nMr hat auf der andern Seite der Ebene rAR ein Neben-Dreyeck (contiguum), welches mit ihm das Perpendikel rn gemeinschaftlich hat, und dessen Hypothenuse die Ergäntzung der Hypothenuse Mn zu 180°, folglich kleiner ist als ein Quadrant, weil Mn grösser ist; dessen Grundseite aber der MR gleich, folglich die Ergäntzung der Grundseite Mr zu 180° und ebenfalls kleiner ist als ein Quadrant, so daß da auch rn kleiner ist als ein Quadrant, keine von den Seiten dieses Neben-Dreyecks die Grösse eines Quadranten erreichet, wodurch die Winckel desselben die den Seiten B, P entgegengesetzt sind, nothwendig spitzig werden. Das andere Dreyeck nMR hat ein Neben-Dreyeck von eben der Art unter der Ebene rMR, mit welchem es die Grundseite MR gemeinschaftlich hat. Die Hypothenuse desselben, ist die Ergäntzung der Hypothenuse nM zu 180°, und sein Perpendikel ist = rn, folglich die Ergäntzung des Perpendikels nR zu 180 Graden. Es hat also ein jedes rechtwincklichtes Kugel-Dreyeck, dessen Seiten B, P nicht kleiner als Quadranten, und dessen Winckel M, N nicht spitzig sind, ein Neben-Dreyeck, in welchem sich diese Eigenschaften finden.

Aufgabe.

§. 759. In einem rechtwincklichten Kugel-Dreyeck, dessen Seiten alle kleiner als Quadrandranten, folglich die Winckel außer dem rechten Winckel spitzig sind, werden außer diesem rechten Winckel zwey Dinge gegeben, es mögen nun dieses zwo Seiten, zween Winckel, oder eine Seite und ein Winckel seyn; man soll die übrigen Seiten oder Winckel finden.

Auflösung.

Man nehme anstatt des Kugel-Dreyecks einen dreyseitigen körperlichen Winckel NCMR, und stelle durch die gerade Linie RM, welche der MC perpendicular ist, die Ebene NRM senckrecht auf die Grundfläche RCM. Weil nun auch die Ebene NRC auf dieser Grundfläche senckrecht stehet, so ist NR eben dieser Fläche RCM, folglich auch den geraden Linien RC, RM perpendicular. (§. 499.). Ferner ist die gerade Linie MC, welche in der auf NRM senckrecht stehenden Ebene RMC liegt, und dem Durchschnitt dieser zwo Ebenen RM perpendicular ist, auch der Ebene NRM, folglich auch der geraden Linie NM perpendicular (§. 496). Es sind also alle die Dreyecke NRC, RCM, NCM und NRM rechtwincklicht, und der Winckel M des geradlinichten Dreyecks NMR, ist mit dem Winckel M des dreyseitigen körperlichen Winckels einerley. (§. 744). Man lege nunmehr alle diese Dreyecke Fig. 181.

auseinander, und mache aus denselben eine ebene Figur welche in der 182 Zeichnung erscheinet, und deren Bildung man sich also vorstellen kan. Das Dreyeck NRC ist in seiner Lage geblieben, und man hat das Dreyeck NMR so lange um NR gedrehet, bis es in die Ebene des Dreyecks NRC gefallen ist. Hierauf hat man auch das Dreyeck RCM indem man es um RC gedrehet, in diese Ebene gebracht, und endlich ist auch das Dreyeck MNC so lange um die Seite MC gedrehet worden, bis es in die nehmliche Ebene gefallen ist. Da nun CM in dem körperlichen Winckel auf RM und NM zugleich senckrecht fiel, so hat bey diesem auseinander legen RMN zu einer geraden Linie werden müssen. Ubrigens aber sind alle Linien in dieser Figur, bey welchen einerley Buchstaben stehen, einander gleich; und es sind überhaupt alle Linien und Winckel in dieser Figur mit eben den Buchstaben bezeichnet, durch welche man sie in dem körperlichen Winckel unterscheiden konte. Es fliessen aber aus diesen Dreyecken nachstehende Proportionen. In den Dreyecken RCM, NCM ist

$MN : MR = tan.\ H : tan.\ B$ (§. 709.),

in dem Dreyeck NRM aber

$MN : MR = r : cos.\ M.$

Folglich I, $r : cos.\ M = tan.\ H : tan.\ B$

oder

oder $r : cos.\ M = cot.\ B : cot.\ H$ (§. 707.).
Weil man nun die Benennungen M und N verwechseln kan, wenn man B anstatt P, und P anstatt B nimmt, indem H bleibt, so ist auch

$$r : cos.\ N = cot.\ P : cot.\ H.$$

Wenn man ferner NC, welche in der Figur zweymahl vorkommt, als den Halbmesser betrachtet, so ist aus den Dreyecken NRC, NMC

$$NM : NR = sin.\ H : sin.\ P,$$

und aus dem Dreyeck NMR

$$NM ; NR = r : sin.\ M;$$

Folglich II. $r : sin.\ M = sin.\ H : sin.\ P$, und, wenn man die Benennungen M, N, B, P verwechselt,

$$r : sin.\ N = sin.\ H : sin.\ B.$$

Ist hingegen RC der Halbmesser, so folgt aus den Dreyecken NCR, RCM

$$RM : RN = sin.\ B : tan.\ P,$$

und aus dem Dreyeck NRM ist

$$RM ; RN = r ; tan.\ M ;$$

Folglich III. $r : tan.\ M = sin.\ B : tan.\ P$,

oder $r : sin.\ B = tan.\ M : tan.\ P$,

oder $r : sin.\ B = cot.\ P : cot.\ M$.

Und wenn man die Benennungen verwechselt

$$r : sin.\ P = cot.\ B : cot.\ N.$$

Nun aber folgt aus der II. Proportion, unter den verschiednen Benennungen

$r : \sin. H = \sin. M : \sin. P,$

$r : \sin. H = \sin. N : \sin. B,$

diese: $\sin. B : \sin. N = \sin. P : \sin. M$, welche mit der III. Proportion

$r : \sin. B = \cot. P : \cot. M$

zusammengesetzt giebt:

$r : \sin. N = \sin. P \times \cot. P : \sin. M \times \cot. M;$

und da überhaupt ist $r \times \cos. A = \sin. A \times \cot. A$ (§. 708.), so ist auch, wenn man anstatt $\sin. P \times \cot. P$ schreibt $r \times \cos. P$, und $r \times \cos. M$ anstatt $\sin. M \times \cot. M$

IV. $r : \sin. N = \cos. P : \cos. M,$

und wenn man die Benennungen verwechselt

$r : \sin. M = \cos. B : \cos. N.$

Ferner ist aus der III. Proportion

$\cot. M : \cot. P = \sin. B : r,$

und aus der II. Proportion

$\sin. M : \sin. P = r : \sin. H;$

Folglich wenn man zusammensetzt

$\sin. M \times \cot. M : \sin. P \times \cot. P = \sin. B : \sin. H;$

und wenn anstatt $\sin. M \times \cot. M$ geschrieben wird $r \times \cos. M$, und $r \times \cos. P$ anstatt $\sin. P \times \cot. P$, so ist $\cos. M : \cos. P = \sin. B : \sin. H.$
Es war aber die I. Proportion

$r : cos. M = cot. B : cot. H$, daher wenn man wieder zusammensetzt, wird

$r : cos. P = sin B \times cot. B : sin. H \times cot. H$,

und wenn man wieder anstatt der letzten Glieder dieser Proportion setzet was ihnen gleich ist,

V. $r : cos. P = cos. B : cos H.$

Wenn man endlich die I. Proportion

$r : cos. M = cot. B : cot. H$

mit der II. Proportion

$sin. M : sin. P = r : sin. H$,

und auch mit der III. Prop. zusammensetzt, in welcher man die Benennungen verwechselt hat,

$sin. P : r = cot. N : cot. B$;

so wird

$sin. M : cos. M = r \times cot. N : sin. H \times cot. H.$

Es ist aber $sin. M : cos. M = r : cot. M$,

und $sin. H \times cot. H = r \times cos. H$,

folglich wenn man dieses an die gehörige Stelle setzet

VI. $r : cot. M = cot. N : cos. H.$

Es sind also die sechs Proportionen, welche man gefunden hat, und aus denen noch vier andre durch Verwechslung der Benennungen B, P, M, N hergeleitet werden, in der Ordnung folgende:

$$
\begin{array}{ll}
\text{I.} & r : \cos. M = \cot. B : \cot. H \\
\text{II.} & r : \sin. H = \sin. M : \sin. P \\
\text{III.} & r : \sin. B = \cot. P : \cot. M \\
\text{IV.} & r : \sin. N = \cos. P : \cos. M \\
\text{V.} & r : \cos. B = \cos. P : \cos. H \\
\text{VI.} & r : \cot M = \cot. N : \cos. H
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\text{VII.} & r : \cos. N = \cot. P : \cot. H \\
\text{VIII.} & r : \sin. H = \sin. N : \sin. B \\
\text{IX.} & r : \sin. P = \cot. B : \cot. N \\
\text{X.} & r : \sin. M = \cos. B : \cos. N
\end{array}
$$

in welchen man auch überall anstatt der Verhältnisse der Cotangenten, die Verhältnisse der Tangenten verkehrt genommen setzen kan. Es enthalten aber diese zehen Proportionen alle die verschiednen Arten, wie man die Winckel und Seiten, welche in einem rechtwincklichten Kugel-Dreyeck als gegeben oder gesucht vorkommen, zusammensetzen kan. Da nun ein Glied in diesen Proportionen durchgehends der Halbmesser ist; und man zu jeden drey Gliedern einer Proportion das vierte zu finden weis: so werden allerdings, wenn in einem rechtwincklichten Kugel-Dreyeck außer dem rechten Winckel zwey Dinge gegeben sind, es mögen nun zwo Seiten zween Winckel, oder eine Seite und ein Winckel

seyn,

seyn, durch diese Proportionen die übrigen Dinge gefunden; und weil man hier alle Seiten kleiner als Quadranten, und die Winckel spitzig voraus gesetzt hat, so werden dieselben völlig bestimmt, sie mögen nun durch die Sinus, Cosinus, Tangenten oder Cotangenten gegeben seyn.

Anmerckung.

§. 760. Daß die gefundenen zehen Proportionen würcklich alle Fragen beantworten, welche bey einem rechtwincklichten Kugel-Dreyeck vorkommen können, kan man folgendergestalt zeigen. Es sind außer dem rechten Winckel in dem Dreyeck folgende Dinge: M, N, P, B, H. Wenn man allzeit drey und drey derselben zusammensetzt, so kan dieser nur auf folgende zehen verschiedne Arten geschehen: MNP, MNB, MNH, MPB, MPH, MBH, NPB, NPH, NBH, PBH. Alle diese Zusammensetzungen findet man in den zehen Proportionen, und man kan also, wenn zwey von diesen Dingen, welche es auch seyn mögen, gegeben sind, allzeit das dritte finden, da das vierte Glied der Proportion r ist.

Aufgabe.

§. 761. Wenn in einem rechtwincklichten Kugel-Dreyeck, einige Seiten grösser als Quadranten, und einige Winckel stumpf sind; es werden aber wieder außer dem rechten

Winckel,

Winckel, zwo Seiten, zween Winckel, oder ein Winckel und eine Seite gegeben, das übrige zu finden.

Auflösung.

Man löse anstatt dieses Dreyecks sein Neben-Dreyeck auf, dessen Seiten alle kleiner als Quadranten, und dessen Winckel außer dem rechten spitzig sind (§. 758): die Seiten dieses Neben-Dreyecks sind die Ergäntzungen der Seiten des aufgegebenen Dreyecks zu 180 Graden, und jene Winckel die Ergäntzungen dieser Winckel zu 2 R, folglich haben beide einerley Sinus, und Tangenten von einerley Grösse. Weil aber in den aufgegebenen Dreyecken, die Seiten welche man sucht, bald grösser sind als Quadranten, bald kleiner, und die Winckel grösser oder kleiner seyn können als ein rechter Winckel, so bestimme man durch die Lehrsätze §. 753. 755 welches von beiden in dem vorkommenden Falle statt habe.

Oder, weil die Cosinus, Tangenten und Cotangenten der Bogen, welche grösser sind als ein Quadrant, und der Winckel, welche einen rechten Winckel übersteigen, negativ werden (§. 687. 692. 698.), wenn die Cosinus, Tangenten und Cotangenten der Bogen und Winckel unter 90 Graden als positiv betrachtet worden sind, so unterscheide man die Cosinus, Tangengenten und Cotangenten welche zu den spitzigen Winckeln gehören, von denjenigen, deren Winckel stumpf sind, durch die Zeichen + —, und entdecke nach Anleitung §. 606. das Zeichen, welches man dem gesuchten vorsetzen muß. Ist dieses Zeichen +, so ist das gesuchte kleiner als ein Quadrant oder rechter Winckel, hingegen grösser, wenn man vor dasselbe das Zeichen — herausbringt. Da aber ein positiver Sinus zugleich zu einem stumpfen Winckel, und zu einem spitzigen gehöret, welcher jenes Ergänzung zu 180 Graden ist, so läßt ein solcher Sinus allzeit einen Zweifel übrig, welcher von diesen Bogen oder Winckeln zu nehmen sey, wenn dieses nicht durch den Lehrsatz §. 753. bestimmt wird.

Anmerckung.

§. 762. Wenn man alles untersuchet, so findet man, daß nur in denjenigen Fällen eine Zweydeutigkeit statt habe, wo M, P oder welches eben so viel ist N, B gegeben sind. Denn nur in diesen Fällen allein wird das gesuchte durch einen Sinus gefunden, wie man siehet, wenn man auf die Proportionen §. 759. zurückgehet. Zwar kan in der II. Proportion auch P oder M das gesuchte seyn, und doch durch einen Sinus gefunden werden; alsdenn aber ist in dem ersten Falle M, und in dem zweyten Falle P gegeben; und man weis, daß diese Dinge allzeit

von

von einerley Art sind, das ist, entweder beide 90° übertreffen, oder beide weniger als 90° Grade halten (§. 753.); wodurch also der Zweifel gehoben wird. Eben dieses ist von der VIII. Proportion zu sagen. Die Ursache aber der Zweydeutigkeit in den zuerst angezeigten Fällen ist, daß man aus den gegebenen Fig. 183. Dingen M, P oder N, B allzeit zwey rechtwincklichte Kugel-Dreyecke beschreiben kan. Denn wenn man zwischen die halben Cirkel MRm, MNm, deren Flächen einander in Mm schneiden, den Ausschnitt NCR auf die Ebene MRm senckrecht stellet, so ist der Winckel M in dem Kugel Dreyeck MNR dem Winckel m in dessen Neben Dreyeck NRm gleich, und NR oder P ist beiden Dreyecken gemeinschaftlich. Wenn also M und P gegeben sind, so sieht man nichts, wodurch das gesuchte H, B oder N, mehr auf das eine von diesen Dreyecken als auf das andre eingeschränckt seyn solte.

§. 763. Man wird übrigens unter den gegebenen Proportionen diejenige leicht auslesen, welche zu Auflösung eines besondern Falles dienet. Es sey M und B gegeben, und N werde gesucht, so ist aus der X. Proportion, in welcher diese Buchstaben vorkommen $r : \mathit{sin.}\ M = \mathit{cos.}\ B : \mathit{cos.}\ N$. Wird hingegen M und N gegeben und P gesucht; so muß man die Glieder der IV. Proportion, in welcher man diese Buchstaben antrift, in folgende Ordnung setzen: $\mathit{sin.}\ N : \mathit{cos.}\ M = r : \mathit{cos.}\ P$, und so in den übrigen Fällen.

Lehrsatz.

Lehrsatz.

§. 764. Wenn in einem schiefwincklichten Kugel-Dreyeck MOm, aus einem der Winckel O, auf die Ebene in welcher die dem Winckel entgegengesetzte Seite Mm liegt, die Seite OR senckrecht herabgezogen wird: so fällt dieselbe innerhalb des Winckels O, wenn die Winckel M und m beide stumpf oder beide spitzig sind; hingegen auserhalb des Winckels O, wenn einer von den Winckeln M, m spitzig, und der andre stumpf ist. Fig. 184. 185.

Beweis.

Durch die Seite OR entsteht das schiefwincklichte Kugel-Dreyeck aus zweyen rechtwincklichten OMR, und OmR, in deren jedem OR das Perpendikel oder die Seite P ist. Fällt nun dieses P oder OR innerhalb des Winckels O, und man setzt daß M spitzig und m stumpf sey, so folgt aus dem ersten, daß P kleiner sey als ein Quadrant, und aus dem letzten, daß P den Quadranten übertreffe (§. 753.), welches ein Wiederspruch ist. Fällt aber P auserhalb des Winckels O, und man setzt M sey spitzig und OmM ebenfalls spitzig, so ist OmR stumpf, woraus wieder folgt, daß P zugleich grösser und kleiner sey als ein Quadrant: und eben dieses würde folgen, wenn man annehmen wolte, daß M und OmM beide stumpf wären.

Anmer-

§. 765. Weil man nun die zwey rechtwincklichten Kugel-Dreyecke, ORM, ORm, aus denen das schiefwincklichte Dreyeck OmR entstehet, addiren muß, wenn OR innerhalb des Winckels O, und subtrahiren, wenn OR auserhalb dieses Winckels fällt, so kan man wenn M und m gegeben sind, daraus schliessen, welches von beiden in jedem Falle statt habe. Man bezeichne in dem rechtwincklichten Dreyeck ORM, die Seiten und Winckel wie vorher durch H, P, B, M, N; in dem andern Dreyeck ORm aber, bezeichne man das beiden gemeinschaftliche Perpendikel ebenfalls mit P, die übrigen Seiten und Winckel desselben aber, welche mit den Seiten und Winckeln des ersten Dreyecks einerley Lage haben, mit h, b, m, n. So ist in dem ersten Falle, da M und m beide spitzig oder beide stumpf sind, der Winckel $O = N + n$ und die Seite $Mm = B + b$ in dem zweyten Fall aber, da einer von den Winckeln M oder m spitzig und der andre stumpf ist, wird $O = N - n$, und $Mm = B - b$. Wenn man also den Winckel O überhaupt durch das zweydeutige Zeichen $N \mp n$ ausdrückt, und die Seite Mm durch $B \mp b$, so wird man aus der Beschaffenheit der Winckel M und m leicht bestimmen können, in welchem Falle das Zeichen + und in welchem das Zeichen — zu gebrauchen sey.

Aufgabe.

§. 766. Regeln zu machen, durch welche, wenn in einem schiefwincklichten Kugel-Dreyeck drey Dinge gegeben sind, es mögen nun bloß Seiten, bloß Winckel, oder Seiten und

Winckel

Winckel seyn, die übrigen Seiten oder Winckel gefunden werden können.

Auflösung.

Nachdem man aus einem der Winckel des aufgegebenen Dreyecks, die Seite OR auf die entgegengesetzte, und wenn es nöthig ist, verlängerte Seite senckrecht gezogen hat, gebrauche man die gefundenen Proportionen bey beiden rechtwincklichten Dreyecken welche durch diese OR entstehen: Es ist aber aus der II. Proportion

$r : \mathit{sin}.\,\mathrm{H} = \mathit{sin}.\,\mathrm{M} : \mathit{sin}.\,\mathrm{P}$,

und $r : \mathit{sin}.\,\mathrm{h} = \mathit{sin}.\,\mathrm{m} : \mathit{sin}.\,\mathrm{P}$, folglich

I. $\mathit{sin}.\,\mathrm{H} : \mathit{sin}.\,\mathrm{h} = \mathit{sin}.\,\mathrm{m} : \mathit{sin}.\,\mathrm{M}$.

Ferner ist aus der III. Proportion

$r : \mathit{sin}.\,\mathrm{B} = \mathit{cot}.\,\mathrm{P} : \mathit{cot}.\,\mathrm{M}$

und $r : \mathit{sin}.\,\mathrm{b} = \mathit{cot}.\,\mathrm{P} : \mathit{cot}.\,\mathrm{m}$, also

II. $\mathit{sin}.\,\mathrm{B} : \mathit{sin}.\,\mathrm{b} = \mathit{cot}.\,\mathrm{M} : \mathit{cot}.\,\mathrm{m}$

Hiernächst ist aus der IV. Proportion

$r : \mathit{sin}.\,\mathrm{N} = \mathit{cos}.\,\mathrm{P} : \mathit{cos}.\,\mathrm{M}$

und $r : \mathit{sin}.\,\mathrm{n} = \mathit{cos}.\,\mathrm{P} : \mathit{cos}.\,\mathrm{m}$, folglich

III. $\mathit{sin}.\,\mathrm{N} : \mathit{sin}.\,\mathrm{n} = \mathit{cos}.\,\mathrm{M} : \mathit{cos}.\,\mathrm{m}$.

Hieraus aber folgt weiter (§. 160.)

$(\mathit{sin}.\,\mathrm{N} + \mathit{sin}.\,\mathrm{n}) : (\mathit{sin}.\,\mathrm{N} - \mathit{sin}.\,\mathrm{n})$
$= (\mathit{cos}.\,\mathrm{M} + \mathit{cos}.\,\mathrm{m}) : (\mathit{cos}.\,\mathrm{M} - \mathit{cos}.\,\mathrm{m})$;

und da (§ 710.) $(\mathit{sin}\,\mathrm{N} + \mathit{sin}.\,\mathrm{n}) : (\mathit{sin}.\,\mathrm{N} - \mathit{sin}.\,\mathrm{n})$
$= \mathit{tan}\,(\tfrac{1}{2}\mathrm{N} + \tfrac{1}{2}\mathrm{n}) : \mathit{tan}.\,(\tfrac{1}{2}\mathrm{N} - \tfrac{1}{2}\mathrm{n})$

wie auch (§ 711.) $(\mathit{cos}.\,\mathrm{M} + \mathit{cos}.\,\mathrm{m}) : (\mathit{cos}.\,\mathrm{M} - \mathit{cos}.\,\mathrm{m})$
$= \mathit{tan}.\,(\tfrac{1}{2}c\mathrm{M} + \tfrac{1}{2}c\mathrm{m}) : \mathit{tan}\,(\tfrac{1}{2}c\mathrm{M} - \tfrac{1}{2}c\mathrm{m})$,

so ist IV. $\mathit{tan}\,(\tfrac{1}{2}\mathrm{N} + \tfrac{1}{2}\mathrm{n}) : \mathit{tan}\,(\tfrac{1}{2}\mathrm{N} - \tfrac{1}{2}\mathrm{n})$
$= \mathit{tan}.\,(\tfrac{1}{2}c\mathrm{M} + \tfrac{1}{2}c\mathrm{m}) : \mathit{tan}.\,(\tfrac{1}{2}c\mathrm{M} - \tfrac{1}{2}c\mathrm{m})$.

Ferner ist aus der V. Proportion

$r : cos\, P = cos.\, B : cos.\, H$

und $r : cos.\, P = cos\, b : cos\, h$; also

V. $cos.\, B : cos.\, b = cos.\, H : cos.\, h$.

Hieraus folgt aber

$$(cos.\, B + cos.\, b) : (cos.\, B - cos.\, b) = (cos.\, H + cos\, h) : (cos.\, H - cos.\, h);$$

da nun $(cos\, B + cos.\, b) : (cos.\, B - cos.\, b) = tan.(\frac{1}{2}cB + \frac{1}{2}cb) : tan.(\frac{1}{2}cB - \frac{1}{2}cb)$,

und $(cos.\, H + cos.\, h) : (cos.\, H - cos.\, h) = tan.(\frac{1}{2}cH + \frac{1}{2}ch) : tan.(\frac{1}{2}cH - \frac{1}{2}ch)$;

so ist VI. $tan.(\frac{1}{2}cB + \frac{1}{2}cb) : tan.(\frac{1}{2}cB - \frac{1}{2}cb) = tan.(\frac{1}{2}cH + \frac{1}{2}ch) : tan.(\frac{1}{2}cH - \frac{1}{2}ch)$.

Endlich ist in der VII Proportion

$r : cos.\, N = cot.\, P : cot.\, H$, und

$r : cos.\, n = cot\, P : cot.\, h$,

folglich VII $cos.\, N : cos.\, n = cot.\, H : cot.\, h$.

Es wird sich bald zeigen, daß diese sieben Proportionen zu unserm Zweck hinlänglich sind.

Anmerckung.

§. 767. Unter diesen Regeln ist die Anwendung der sechsten nicht ohne Schwierigkeit, weil bey dem Gebrauch derselben nur $B + b$ oder $B - b$ gegeben wird, da denn nicht so leicht zu sehen ist wie $cB + cb$ oder $cB - cb$ zu schaffen sey, welches eigentlich in derselben vorkommt. Man lasse aber Q einen Quadranten bedeuten, und setze $B = Q - cB$, wie auch $b = Q - cb$, welches seyn wird, wenn jeder Bogen B, b kleiner ist, als ein Quadrant; so wird dadurch

durch $B + b = 2Q - (cB + cb)$, und $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}b = Q - (\frac{1}{2}cB + \frac{1}{2}cb)$, und man siehet hieraus, daß die beyden Summen $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}b$ und $\frac{1}{2}cB + \frac{1}{2}cb$ zusammen einen Quadranten geben. Es ist also $\frac{1}{2}cB + \frac{1}{2}cb = c.(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}b)$, und man kan das erstere aus $B + b$ leicht finden, wenn man nur die Ergänzung seiner Helfte nimmt. Wird aber der Bogen B von b abgezogen, so kommt $b - B = cB - cb$, und $\frac{1}{2}cB - \frac{1}{2}cb = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}B$. Eben dieser Ausdruck hat auch statt, wenn die Bogen B und b beide grösser sind als Quadranten, ob zwar dieses nicht seyn kan, wenn $B + b$ die Seite eines Dreyecks abgiebt. Ist hingegen der eine Bogen B grösser als ein Quadrant und der andre b kleiner, so wird auf eben die Art, oder wenn man nur das Zeichen von cb verändert, gefunden $\frac{1}{2}cB - \frac{1}{2}cb = c(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}b)$, und $\frac{1}{2}cB + \frac{1}{2}cb = \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}b$, nach welchen Vorschriften man also in diesem Falle rechnen muß. Es sind aber die Bogen B und b beide kleiner als Quadranten, wenn H und h beide kleiner oder beide grösser sind. Ist hingegen die eine H grösser als ein Quadrant, und die andre h kleiner, so ist auch die eine b grösser als ein Quadrant, und die andre B kleiner, wie man aus der V. Proportion (§. 766.).

$$cos.B : cos.b = cos.H : cos.h$$

siehet, wenn man nur auf die Zeichen Achtung giebt, welche die Cosinus in allen diesen verschiedenen Fällen bekommen.

Aufgabe.

§. 768. Wenn von allen Seiten oder Winckeln eines schiefwincklichten Kugel-Dreyecks, drey gegeben sind, es mögen nun bloß Seiten, bloß Winckel, oder Seiten und Winckel seyn, das übrige zu finden.

Auflösung.

Man nenne dasjenige was gesucht wird Q, was dem gesuchten entgegenstehet, O, was an beiden Seiten des gesuchten liegt und das gesuchte einschließt K, *k*, diejenigen Dinge hingegen, welche zu beiden Seiten an O liegen, nenne man P, *p*; man setze aber die grossen Buchstaben auf eine Seite, und die kleinen auf die andre, so daß K, P neben einander stehen, und *k*, *p* ebenfalls: so hat man fünf Buchstaben K, *k*, P, *p*, O, von denen drey in jedem Falle gegeben sind, indem Q allzeit das gesuchte bedeutet. Von diesen fünf Buchstaben können drey und drey auf folgende zehen verschiedne Arten vereinigt werden, 1) K*k*P, 2) K*kp*, 3) K*k*O, 4) KP*p*, 5) KPO, 6) K*p*O, 7) *k*P*p*, 8) *k*PO, 9) *kp*O, 10) P*p*O. Es geben aber die Buchstaben K, *k*, und P, *p*, wenn man sowohl diese als jene verwechselt, keine verschiednen Fälle, weil nichts daran liegt, an welche Seite man dieselben zuerst schreibt, wenn nur übrigens die Ordnung nicht verändert wird: also ist die erste Zusammensetzung mit der zweyten, die vierte mit der sieben-

siebenden, die fünfte mit der neunten, die sechste mit der achten, einerley, und es blieben nur folgende sechs übrig, welche verschiedne Fälle anzeigen: I. KkP, oder kKp, II. KkO oder kKO, III. KPp oder kpP, IV. KPO oder kpO, V. KpO oder kPO, VI. PpO oder pPO; und diese geben, weil das gesuchte eine Seite oder ein Winckel seyn kan, in allem zwölf Fragen, welche folgendermassen aufgelöset werden:

Wird eine Seite gesucht, und es ist der ihr entgegengesetzte Winckel O gegeben, so setze man es sey in einem der Dreyecke $NMmn$ der 186. und 187. Zeichnung, h die gesuchte Seite, und O sey M. Alsdenn bemercke man, was in diesen Dreyecken sonst gegeben ist, und bezeichne es mit den beygeschriebenen Buchstaben. Diese Buchstaben suche man in der zweyten Columne der folgenden Tafel, und zwar in deren erstem Theile, unter der Rubric Gegeben. Sind sie daselbst anzutreffen, so zeigen die in eben dem Fach in der vierten und fünften Columne stehende Proportionen wie das Dreyeck aufzulösen sey. Findet man aber diese Buchstaben nicht in der zweyten Columne, so kan man, indem h und M bleibt, die übrigen gegebenen Dinge in den Dreyecken auch anders benennen, und wenn man diese andre Benennung wählet, so wird man sie in der Tafel gewiß antreffen.

Wird eine Seite gesucht, und es ist O nicht gegeben, so setze man die gesuchte Seite sey $B \mp b$, und O sey $N \mp n$, und man bemercke wieder die übrigen gegebenen Dinge mit den Buchstaben, welche ihnen in den Dreyecken beygeschrieben sind; worauf man wie vorhin verfähret.

Wird ein Winckel gesucht, und es ist die ihm entgegengesetzte Seite O gegeben, so setze man der gesuchte Winckel sey m und O sey H.

Ist aber O nicht gegeben, so setze man der gesuchte Winckel sey N∓n, und die ihm entgegengesetzte Seite B∓b; und verfahre in beiden Fällen wie vorher, nur daß man sich hier, weil ein Winckel gesucht wird, des zweyten Theils der Tafel bedienet.

Bey diesem Verfahren dienen die Buchstaben in der ersten Columne der Tafel bloß zu zeigen, daß auf diese Art, alle Fälle welche vorkommen können, würklich aufgelöset werden. Man kan aber diese Columne auch dazu gebrauchen, daß man anstatt eines jeden Buchstabens derselben den Buchstaben der zweyten Columne setzt, welcher in der Ordnung daneben steht, wodurch man die rechte Benennung der gegebenen Dinge in den Dreyecken unmittelbar bestimmt, indem das gesuchte seine vorige Benennung behält, nach dem O gegeben oder nicht gegeben ist, welche Benennung man auch in der dritten Columne der Tafel unter der Aufschrift Gesucht findet.

Uebrigens sind die in der Tafel stehenden Proportionen eben diejenigen, welche §. 759 und 766 herausgebracht worden sind.

Seite

Seite gesucht.

Fälle	Gegeben	Gesucht	Erste Proportion.	Zweyte Proportion.
KpO kPO	m, H, M.	h	$sin.\,m : sin.\,M = sin.\,H : sin.\,h.$	
PpO pPO	H, B $\mp$ b, M.	h	$cos.\,M : r = cot.\,H : cot.\,B.$	$cos.\,B : cos.\,b = cos.\,H : cos.\,h.$
KPO kpO	N $\mp$ n, H, M.	h	$cot.\,M : r = cos.\,H : cot.\,N.$	$cos.\,N : cos.\,n = cot.\,H : cot.\,h.$
KkO kKO	N $\mp$ n, m, M.	h	$tan.(\tfrac{1}{2}cM + \tfrac{1}{2}cm) : tan.(\tfrac{1}{2}cM - \tfrac{1}{2}cm) = tan.(\tfrac{1}{2}N + \tfrac{1}{2}n) : tan.(\tfrac{1}{2}N - \tfrac{1}{2}n)$	$r : cot.\,m = cot.\,n : cos.\,h$
KPp kpP	M, H, h.	B $\mp$ b	$cos.\,M : r = cot.\,H : cot.\,B.$	$cos.\,H : cos.\,h = cos.\,B : cos.\,b$
KkP kKp	M, m, H.	B $\mp$ b	$cos.\,M : r = cot.\,H : cot.\,B.$	$cot.\,M : cot.\,m = sin.\,B : sin.\,b.$

Winckel gesucht.

Fälle	Gegeben	Gesucht	Erste Proportion.	Zweyte Proportion.
KpO kPO	h, M, H.	m	$sin.\,h : sin.\,H = sin.\,M : sin.\,m.$	
PpO pPO	M, N $\mp$ n, H.	m	$cot.\,M : r = cos.\,H : cot.\,N$	$sin.\,N : sin.\,n = cos.\,M : cos.\,m.$
KPO kpO	B $\mp$ b, M, H.	m	$cos\,M : r = cot.\,H : cot.\,B.$	$sin.\,B : sin.\,b = cot.\,M : cot.\,m$
KkO kKO	B $\mp$ b, h, H	m	$tan.(\tfrac{1}{2}cH + \tfrac{1}{2}ch) : tan.(\tfrac{1}{2}cH - \tfrac{1}{2}ch) = tan.(\tfrac{1}{2}cB + \tfrac{1}{2}cb) : tan.(\tfrac{1}{2}cB - \tfrac{1}{2}cb)$	$cot.\,b : cot.\,h = r : cos.\,m$
KkP kKp	H, h, M	N $\mp$ n	$cot.\,M : r = cos.\,H : cot\,N.$	$cot.\,H : cot.\,h = cos.\,N : cos.\,n$
KPp kpP	H, M, m	N $\mp$ n	$cot.\,M : r = cos.\,H : cot.\,N$	$cos\,M : cos.\,m = sin.\,N : sin.\,n$

1. Exempel.

§. 769 Es wird eine Seite gesucht, und die gegebenen Dinge sind K*p*O. Weil unter diesen O ist, so nenne man die gesuchte Seite h, und setze O = M. Alsdenn wird entweder K = N $\mp$ n und *p* = B $\mp$ b, oder K = m und p = H. Die Benennungen N $\mp$ n, B $\mp$ b, M, findet man in der zweyten Columne der Tafel nirgends, es müssen also die Bennenungen m, H, M genommen werden, welche man in der Tafel vor die gesuchten Seiten in dem ersten Fach der zweyten Columne findet. Neben diesen steht in dem vierten Fach die Proportion *sin.* m. *sin.* M = *sin.* H : *sin.* h, durch welche man *sin.* h findet, und aus diesem die Seite h, wenn nur bekannt ist, ob dieselbe grösser oder kleiner sey als ein Quadrant.

§. 770. Will man aber gleich in der ersten Columne den Fall aufsuchen wo K*p*O gegeben ist, so sieht man aus den daneben stehenden Buchstaben der zweyten Columne, daß man nur vor K, m, vor p, H, und vor O, M setzen müsse, worauf man in der dritten Columne in eben dem Fach die Benennung des gesuchten h findet, und das übrige wie vorher verrichtet.

2. Exempel.

§. 771. Es wird wieder eine Seite gesucht, und es werden KPO gegeben. Weil nun auch hier vor Q, h, und vor O, M gesetzt werden muß, so wird entweder K = m, und P = B $\mp$ b, oder K = N $\mp$ n, und P = H. Die ersten Benennungen stehen nicht in der Tafel, wohl aber die letztern, und man findet dieselben auch unmittelbar, wenn man in dem dritten Fach, wo in der ersten Columne KPO stehet, vor K aus der zweyten Columne nimmt N∓n, vor P aber H und vor O, M, da denn wieder der Buchstabe h in der dritten Columne das gesuchte bezeichnet. Man wird also diese Seite h finden, wenn man die in eben dem Fach stehende Proportionen brauchet, deren erste $cot. M : r = cos. H : cot. N$ den Winckel N vollkommen bestimmt. Da nun N∓n ebenfalls bekannt ist, so wird man n allzeit finden, wenn man den kleinem unter den zween Winckeln N und N∓n von dem grössern abzieht. Hierauf bedient man sich ferner der zweyten Proportion in eben dem Fach $cos. N : cos. n = cot. H : cot. h$, oder anstatt derselben (§. 707) dieser, $cos. n : cos. N = tan. H : tan. h$; wodurch man h völlig bestimmt, da die drey ersten Glieder bekannt sind.

3. Exempel.

§. 772. Es wird ein Winckel gesucht, und die gegebenen Dinge sind K*k*O. Der gesuchte Winckel ist hier m und O ist H. Dadurch wird K = B∓b und *k* wird h. Man muß also nach Anleitung der vierten Columne in dem andern Theile der Tafel sagen: $tan. (\frac{1}{2}cH + \frac{1}{2}ch) : tan. (\frac{1}{2}cH - \frac{1}{2}ch) = tan. (\frac{1}{2}cB + \frac{1}{2}cB) : tan (\frac{1}{2}cB - \frac{1}{2}cb)$. Es ist aber H und h gegeben, folglich auch *c*H und *c*h, woraus man die zwey ersten Glieder dieser Proportion machen kan, welches jedoch nach der §. 767 gegebenen Anweisung leichter geschieht. Ist nun K = B+b, so kan man auch das dritte Glied nach eben dem §. machen, und aus diesen das vierte finden, wodurch man B — b erhält. Die Helfte von diesem zu der Helfte von B+b

addi-

addiret, oder von derselben subtrahiret, giebt B und b. Ist aber K = B — b, so hat man, wie in eben dem §. 767 gezeigt wird, außer den zwey ersten Gliedern das vierte Glied der Proportion $tan.(\frac{1}{2}cB - \frac{1}{2}cb)$, woraus man eben so leicht das dritte, und aus beiden B und b findet. Eben dieser Erleichterung kan man sich auch in dem vierten Fall der ersten Abtheilung der Tafel bedienen.

4. Exempel.

§. 773. Es wird wieder ein Winckel gesucht, und die gegebenen Dinge sind KPp. Weil unter diesen O nicht stehet, so ist der gesuchte Winckel N∓n und K ist H; P ist M, und p ist m. Es stehen diese Benennungen in dem letzten Fach des Theiles der Tafel vor die gesuchten Winckel. Man muß also sagen $cot.$ M : $r = cos.$ H : $cot.$ N. Durch diese Proportion findet man den Winckel N, und man kan also $sin.$ N haben; worauf man nach der zweyten Proportion in eben diesem Fach setzet $cos.$ M : $cos.$ m = $sin.$ N : $sin.$ n. Es bleibt aber hier ein Zweifel übrig, ob der Winckel n spitzig oder stumpf sey. Kan dieser Zweifel gehoben werden, so ist aus den gefundenen N und n der Winckel N∓n leicht zu machen. Denn da hier die beiden Winckel M und m gegeben sind, so sieht man aus denselben, ob Q = N + n oder Q = N — n (§. 765.) In andern Fällen verfährt man auf eben diese Art; überall aber wird einiges Nachdencken und Achtsamkeit auf die vorhergehenden Lehrsätze erfordert.

Anmerckung.

§. 774. Es ist aber dasjenige, was man durch diese Regeln heraus bringt, nicht allzeit völlig bestimmt, sondern es bleibt öfters ein Zweifel übrig, ob die gefundene Seite grösser oder kleiner als ein Quadrant, und ob der gefundene Winckel stumpf oder spitzig sey. Dieses rührt nicht von einigem Fehler in den Regeln, sondern davon her, daß öfters aus einerley gegebenen Dingen zwey schiefwincklichte Kugel-Dreyecke gemacht werden können, in welchen die übrigen Dinge, welche von den gegebenen abhängen, eben so verschieden sind, als dieses §. 762 bey den rechtwincklichten Kugel-Dreyecken gezeigt worden ist.

Fig. 188. §. 775 Damit die Ursache hievon in die Augen fallen möge, so stelle man sich vor, daß die Ebene des halben Cirkels ANB auf der Ebene des halben Cirkels ADB schief stehet, und daß die Ebene des Ausschnittes NCR, welche auf der ADB senckrecht stehet, den halben Cirkel ANB in zwey ungleiche Ausschnitte ACN, NCB theilet. Man mache hierauf RCD = RCE, und lege durch die geraden Linien CD, CE und durch CN, die Ausschnitte NCD, NCE, deren Winckel, oder die Bogen, welche diese Winckel messen, ND, NE nothwendig gleich sind, da sie vollkommen auf einerley Art durch den rechten Winckel R, durch das Perpendikel NR, und durch die Seiten RD = RE bestimmt werden. Auch müssen wie leicht einzusehen ist, die Winckel bey D und E einander gleich seyn, NDR = NER, und NDA = NEB. Es können also auf diese Art zwey schiefwincklichte Kugel-Dreyecke NDA und NEB gemacht werden, in welchen die Winckel A

und B, und die diesen Winckeln entgegenstehende Seiten ND, NE, wie auch die Winckel NDA, NEB einander gleich, die übrigen Seiten aber NA, NB, wie auch AD, BE, und die Winckel DNA, ENB von gantz verschiedner Grösse sind. Eben diese Eigenschaften haben auch die Kugel-Dreyecke NEA, NDB; wir können aber bey den ersteren stehen bleiben.

§. 776. Hieraus folgt nun erstlich, daß durch zween gegebene, oder nach Willkühr angenommene Winckel A und ADN, und durch die Seite ND, welche an dem letzten von diesen Winckeln liegt, ein Kugel-Dreyeck nicht vollkommen bestimmt werde, indem aus diesen Dingen nicht allein das Dreyeck NAD, sondern auch das Dreyeck NEB beschrieben werden kan, welches von dem ersten, was die übrigen Seiten und Winckel betrift, gäntzlich verschieden ist.

§. 777. Zweytens folgt hieraus, daß auch durch zwo Seiten NA, ND, und durch den Winckel A welcher nicht zwischen diesen Seiten liegt, das Kugel-Dreyeck nicht bestimmt werde. Denn man kan aus diesen Dingen außer dem Dreyeck NAD auch das Dreyeck NAE beschreiben, in welchem NE = ND und die übrigen gegebenen Dinge NA und A die nehmlichen sind; da hingegen die Seite AD von der Seite AE, und der Winckel AND von dem Winckel ANE übertroffen wird, der Winckel NER = NDR aber, die Ergäntzung des Winckels NDA zu 180 Graden ist.

§. 778. Aus der ersten von diesen Folgerungen schließt man weiter, daß so oft aus zween Winckeln, und einer Seite welche nicht zwischen diesen Winckeln liegt,

liegt, das ist, aus M, m und H die übrigen Dinge gesucht werden, eine Zweydeutigkeit übrig bleibe. Diese Zweydeutigkeit hängt, bey dem ersten und sechsten derjenigen Fälle wo eine Seite gesucht wird, wie auch bey dem sechsten der Fälle wo man einen Winckel sucht, davon ab, daß der gefundene Sinus zugleich zu einem Bogen von mehr oder weniger als 90 Graden gehört. Denn hier kan man aus den gegebenen M und m wissen, ob von den gefundenen B und b, oder N und n, die Summe oder die Differenz zu nehmen sey (§. 765.).

§. 779. Eben so schließt man aus der zweyten Folgerung §. 777. daß in dem fünften von den Fällen, wo eine Seite gesucht wird, wie auch in dem ersten und fünften der Fälle wo man einen Winckel sucht, die gesuchten Dinge mit einer Zweydeutigkeit gefunden werden, weil hier H, h, M gegeben sind, zwo Seiten, und ein Winckel, welcher nicht zwischen diesen Seiten liegt. Und hier hängt die Zweydeutigkeit, wenn der Winckel m gesucht wird, davon ab, daß dieser Winckel durch einen Sinus gegeben wird; wird aber $B \mp b$ oder $N \mp n$ gesucht, so ist man in Zweifel ob die Summe oder die Differenz zu nehmen sey.

§. 780. Man sieht, wenn man die Regeln selbst betrachtet, daß dieselben in allen übrigen Fällen keine Zweydeutigkeit übrig lassen, da sie das gesuchte nicht durch einen Sinus, sondern durch Cosinus und Tangenten geben, und keine Addition oder Subtraction der gefundenen Dinge erfordern.

ENDE.

Druckfehler.

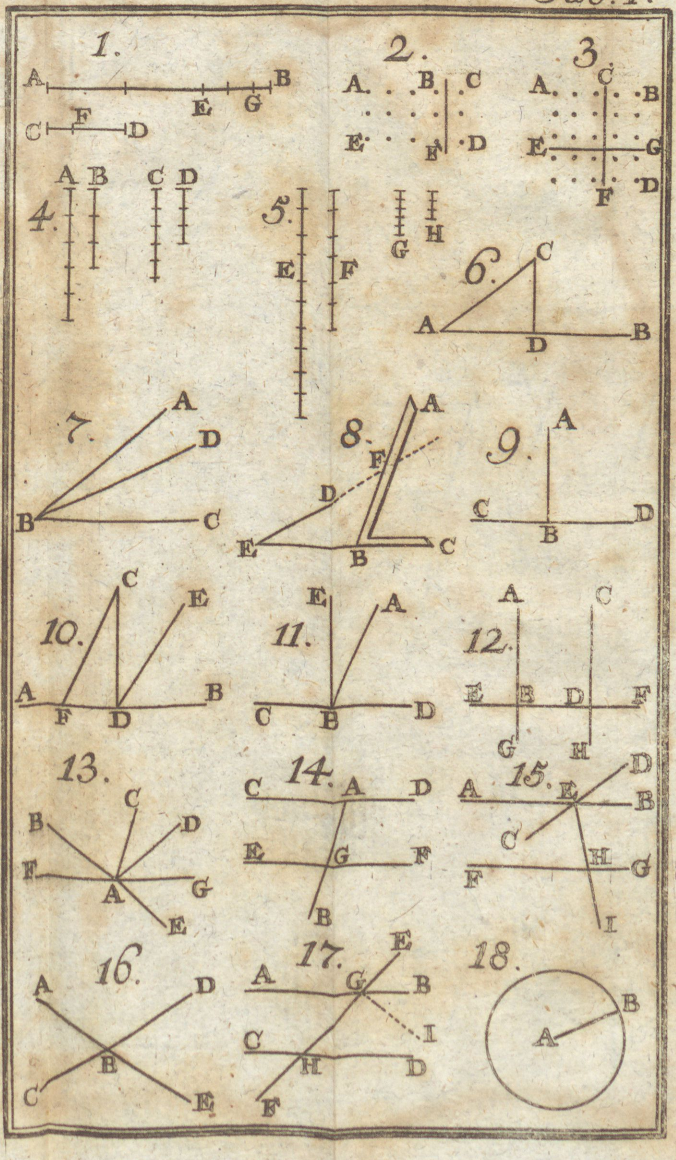
Seite 90. §. 146. Zeile 4. statt C lies D. S. 92. §. 151. Z. 12. statt, so sagt man C, lies, so sagt man. S. 200. Z. 2. statt (§. 229.) lies (§. 249.) S. 214. Beweis. Z. 6. statt CAE lies + CAE. S. 216. Beweis. Z. 3. statt A lies H. S. 275. Z. 4. statt b lies d. S. 304. neben §. 468. lies Fig. 108. S. 343. §. 553. Z. 3. statt AB lies AC. S. 350. Z. 2. statt abc lies Abc. S. 373. Z. 7. statt = 2*abb* lies = 4*abb*, ebend. Z. 8. statt = 6*bbc*. lies = — 6*bbc*. S. 384. §. 635. Z. 3. statt Ausschnittes lies Abschnittes. S. 427. Z. 9. statt AC lies AB. S. 446. §. 749. Z. 3. statt mEB lies in EB. S. 464. Z. 3. statt OmR lies OmM.

In der Tafel

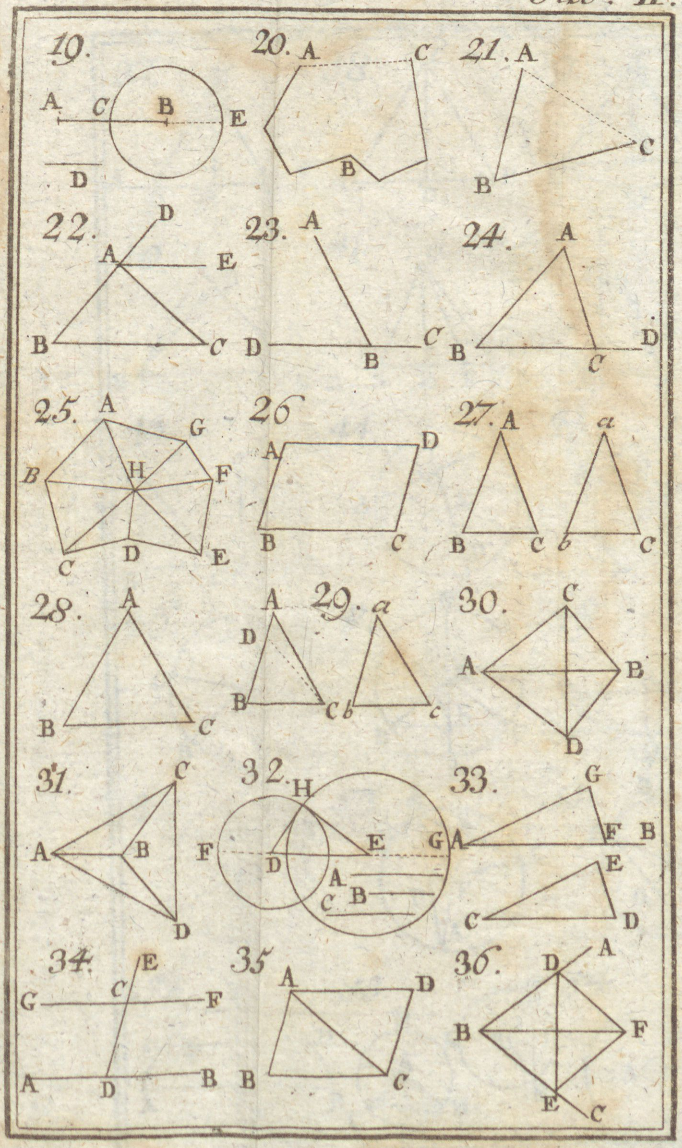
Seite 155. Logarith. Zeile 22. statt 1,85773 lies 1,85733. S. 157. Cot. Z. 21. statt 46. lies 06. S. 161. Log. Z. 3. statt 2,80749 lies 2,30749. S. 165. Log. Z. 5. statt 2,49429 lies 2,48429. S. 175. Log. Z. 1. statt 2,64115 lies 2,74115. S. 187. Cot. Z. 1. statt 40°, lies 49°.

NB. Dieses Blat wird gantz ans Ende gebracht.

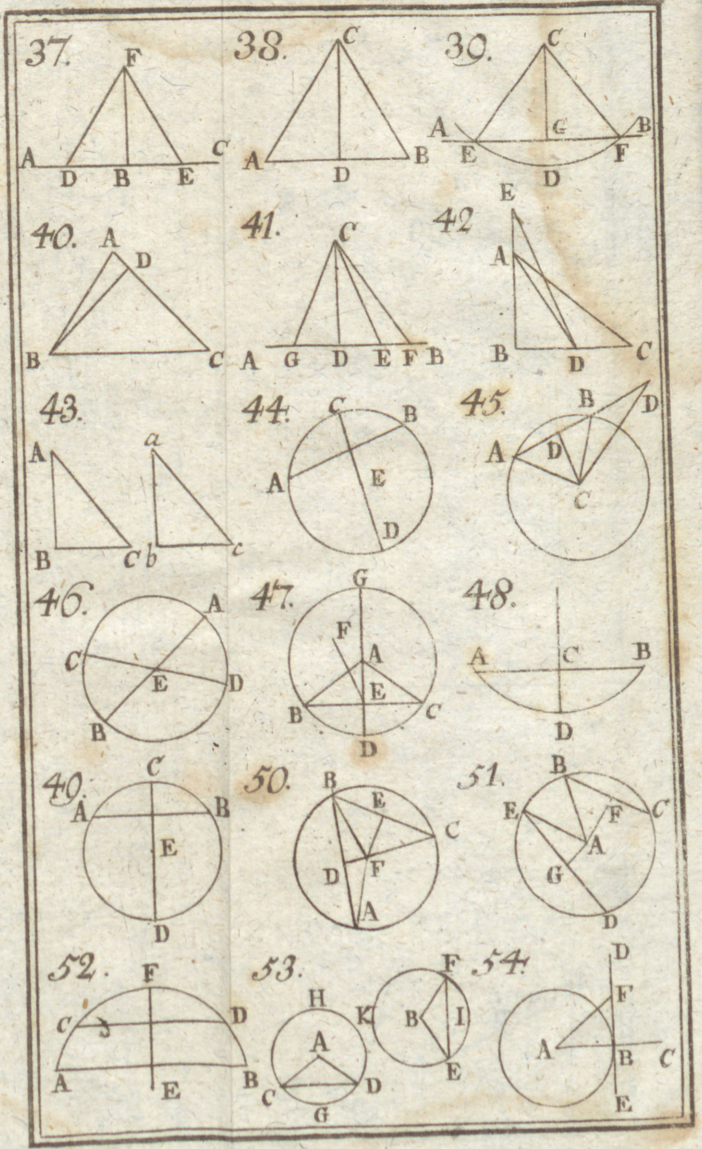
Tab. I.



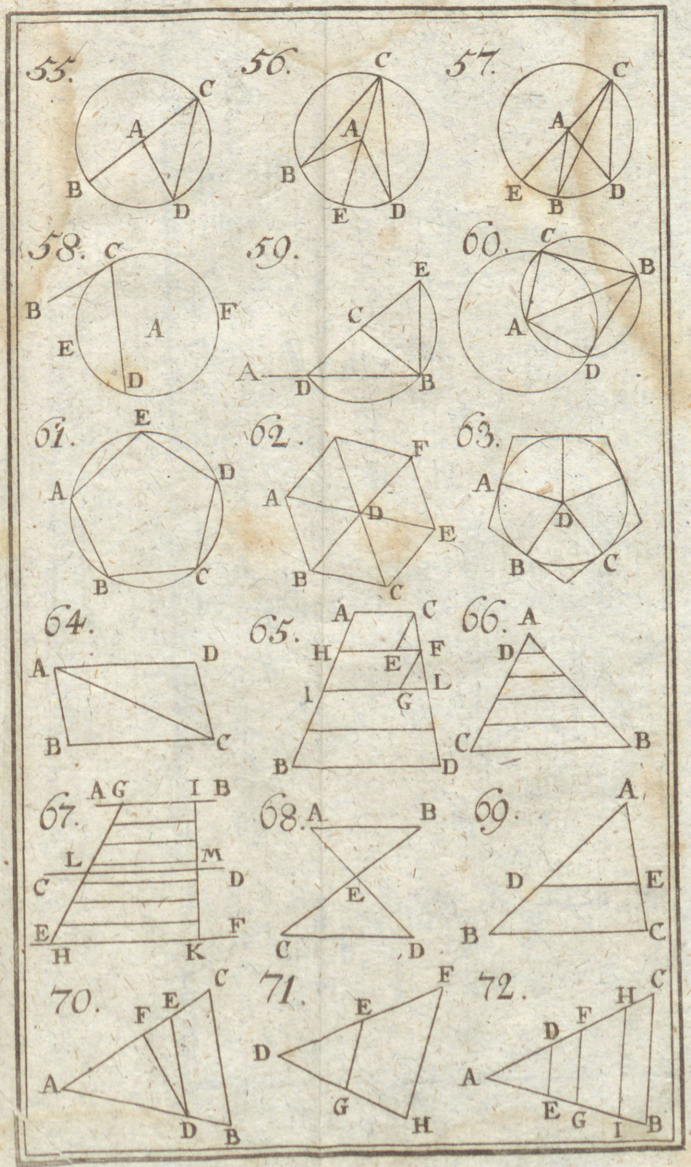
Tab. II.

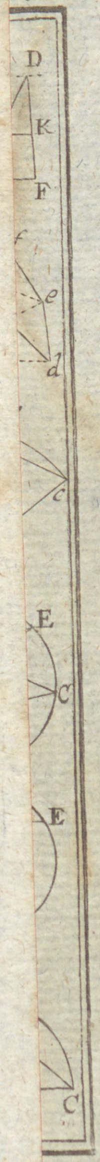


Tab. III.

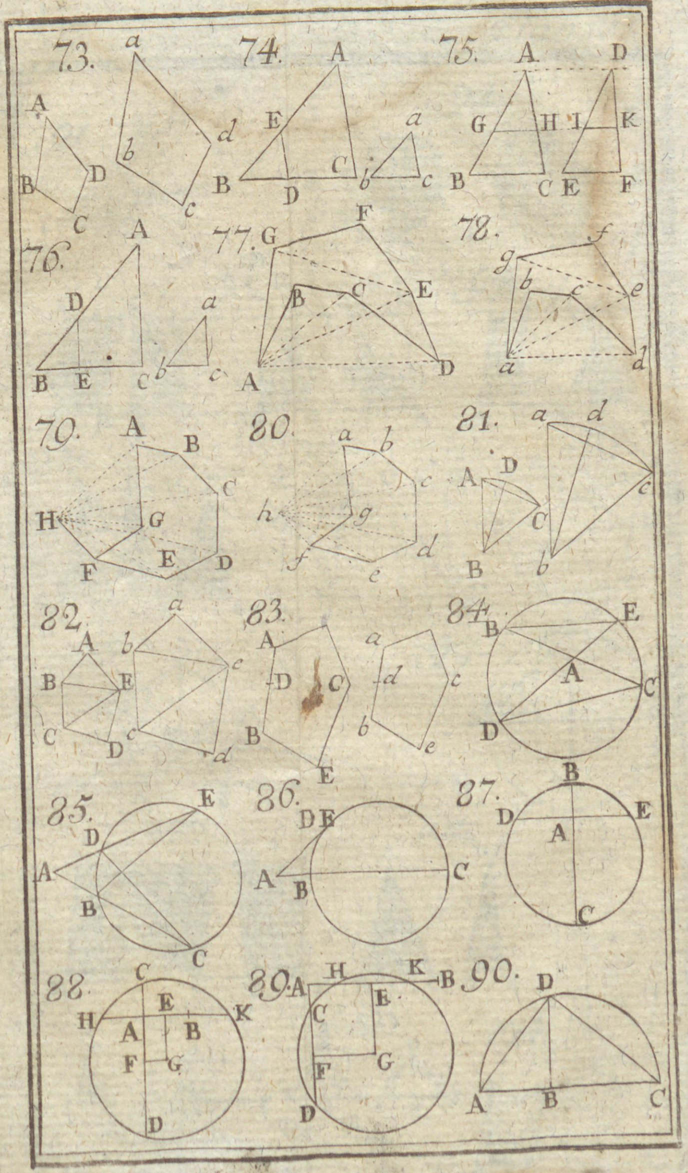


Tab. IIII.

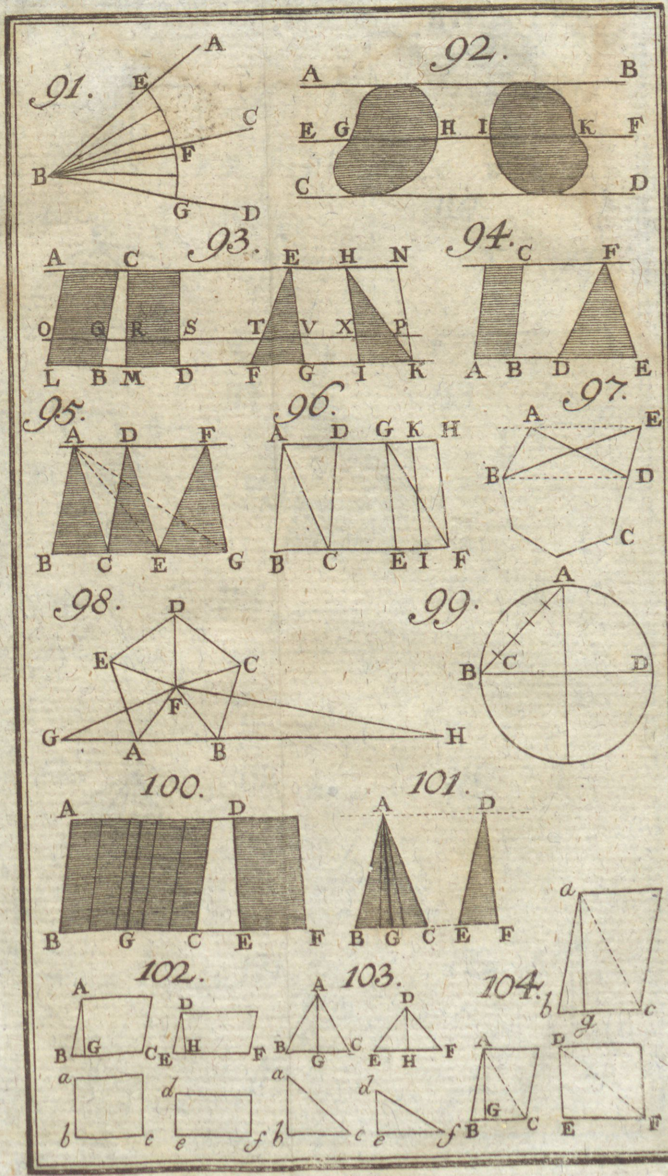

55. A B C D
56. A B C D E
57. A B C D E
58. A B C D E F
59. A B C D E
60. A B C D
61. A B C D E
62. A B C D E F
63. A B C D
64. A B C D
65. A B C D E F G H I L
66. A B C D
67. A G I B L M C D E F H K
68. A B E C D
69. A B C D E
70. A B C D E F
71. D E F G H
72. A B C D E F G H I


D
K
F
e
d
c
E
C
E
C

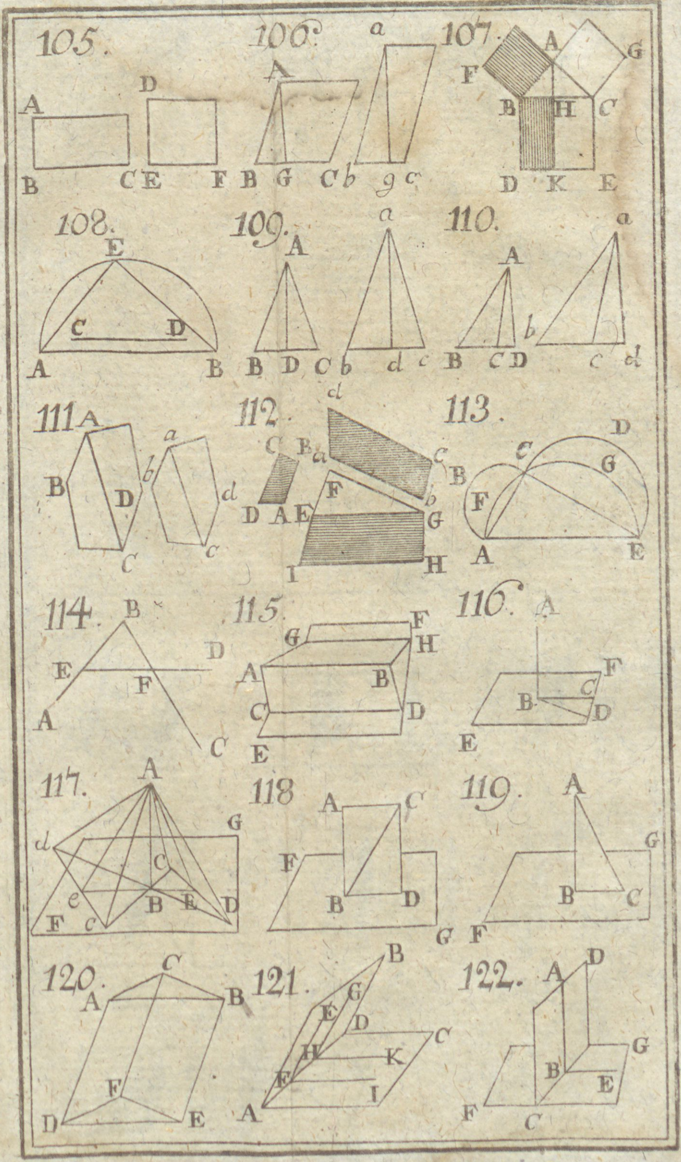
Tab. V.



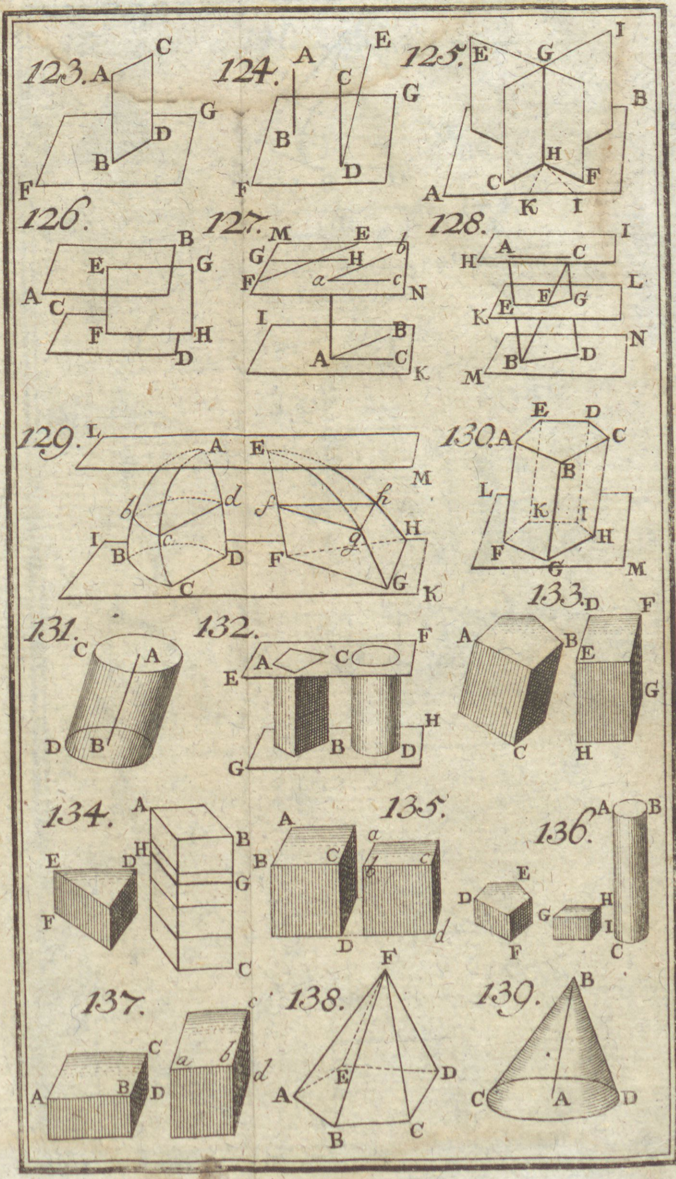
Tab. VI.



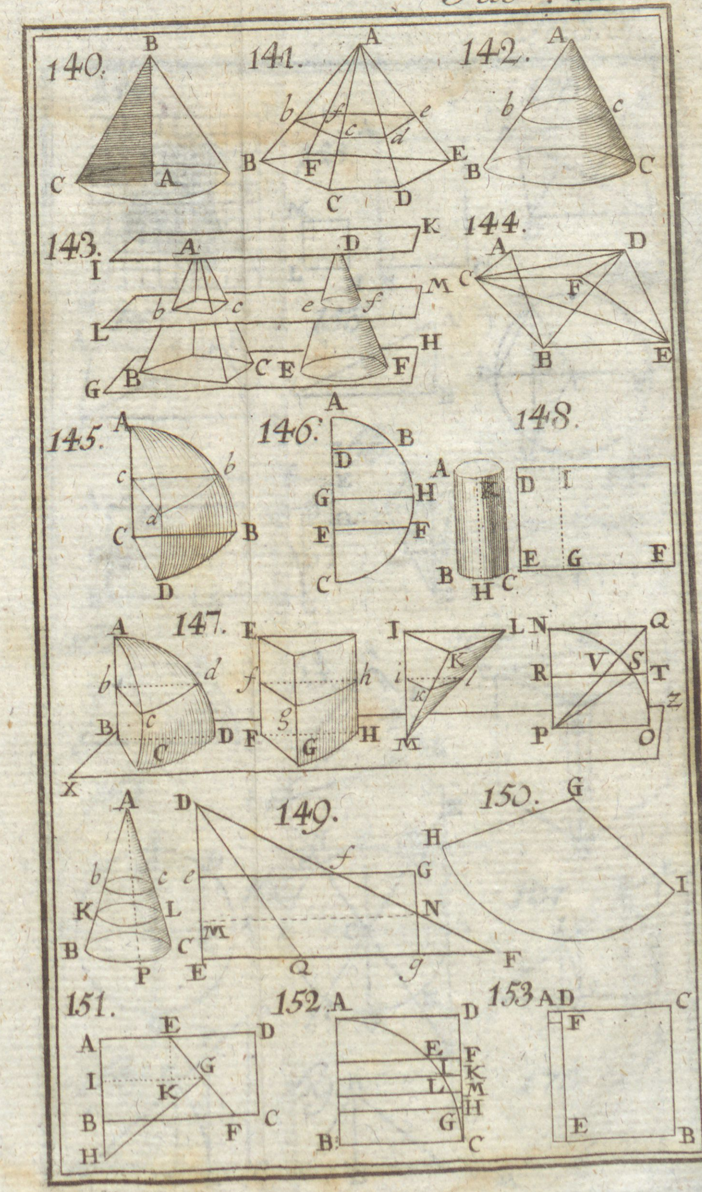
Tab. VII.


105.
106.
107.
108.
109.
110.
111
112
113.
114.
115.
116.
117.
118
119.
120.
121.
122.

Tab. VIII.

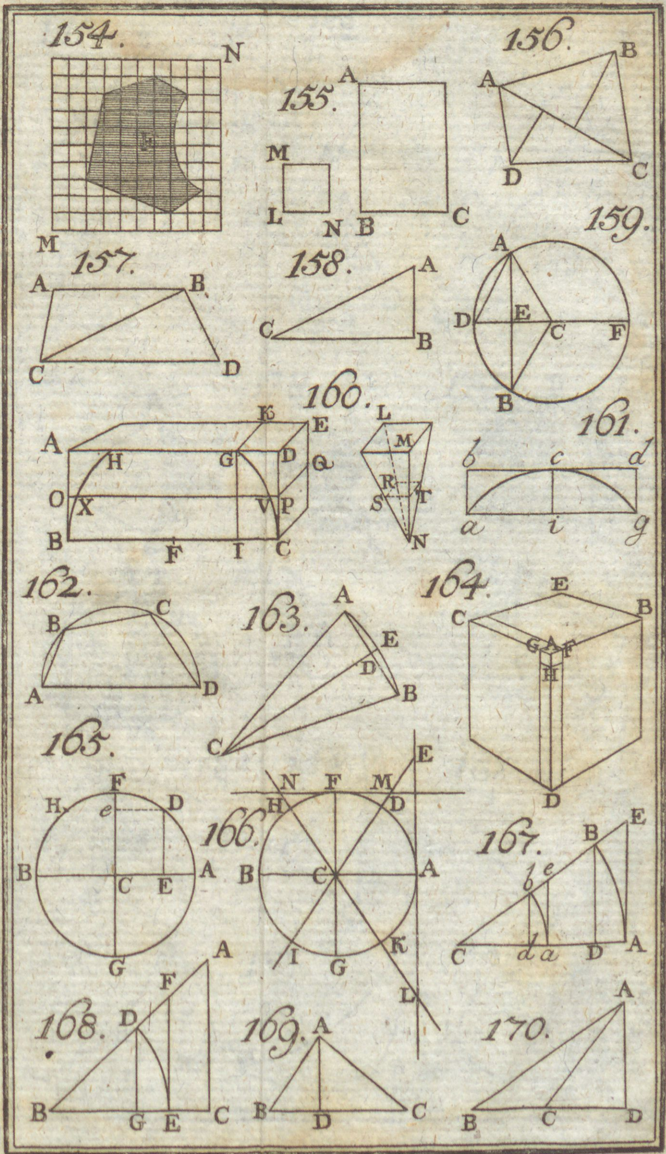


123.
124.
125.
126.
127.
128.
129.
130.
131.
132.
133.
134.
135.
136.
137.
138.
139.

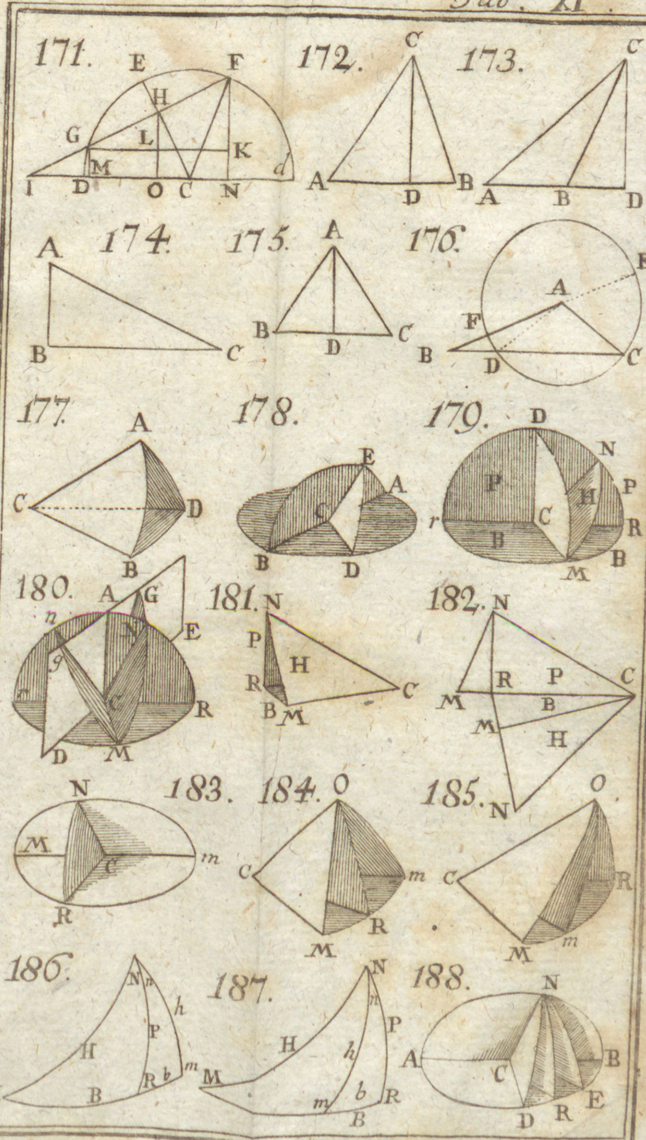


140.
141.
142.
143.
144.
145.
146.
147.
148.
149.
150.
151.
152.
153.

Tab. X.


154.
155.
156.
157.
158.
159.
160.
161.
162.
163.
164.
165.
166.
167.
168.
169.
170.

Tab. XI.


171.
172.
173.
174.
175.
176.
177.
178.
179.
180.
181.
182.
183.
184.
185.
186.
187.
188.